Řady s nezápornými členy

Studujeme $\sum a_n$, kde $a_n \geq 0$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

Pozorování

Pro řady s nezápornými členy mohou nastat pouze dvě možnosti. $\sum a_n \in \mathbb{R}$ nebo $\sum a_n = +\infty$. To plyne z toho, že posloupnost $\{s_m\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající, a tedy dle V2.9- $\exists \lim s_m = \sum a_n$.

VĚTA 2 (linearita konvergentních řad):

Nechť $\sum a_n$ a $\sum b_n$ konvergují. Pak:

(i) $\sum (a_n + b_n)$ konverguje.

(ii) $\sum c_n$ konverguje $\iff \sum \alpha c_n$ konverguje pro $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \emptyset$.

Důkaz: ⟨cvičení⟩

VĚTA 3 (srovnávací kritérium):

Nechť $\sum a_n$ a $\sum b_n$ jsou řady s nezápornými členy. Nechť dále existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $\forall n \geq n_0$ platí $a_n \leq b_n$. Pak:

(i) $\sum b_n$ konverguje $\Rightarrow \sum a_n$ konverguje.

(ii) $\sum a_n$ diverguje $\Rightarrow \sum b_n$ diverguje.

Obě tvrzení říkají vpodstatě totéž. (a_n je "hodnější" řada, b_n "zlobivější".)

DŮKAZ:

(i) $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, $\sigma_m = b_1 + \cdots + b_m$
Dále definujme $\sigma := \lim \sigma_m \in \mathbb{R}$.
Navíc víme, že $\{s_n\}$ je posloupnost neklesající.

$$s_n = a_1 + \cdots + a_{n_0} + a_{n_0+1} + \cdots + a_n$$

$$\leq a_1 + \cdots + a_{n_0} + \sigma_n \qquad (\forall n \geq n_0)$$

$$\leq a_1 + \cdots + a_{n_0} + \sigma \qquad (\in \mathbb{R})$$

Tedy je $\{s_n\}$ neklesající shora omezená posloupnost, tudíž $\sum a_n$ je dle V2.9- konvergentní.

(ii) $\iff$ (i)

Q.E.D.

VĚTA 4 (limitní srovnávací kritérium):

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy. Nechť dále existuje $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = A \in \mathbb{R}^*$. Pak:

(i) $A \in (0,\infty) \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje

(ii) $A = 0 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje

(iii) $A = \infty \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje

DŮKAZ:

(i) Víme, že $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $\forall n \geq n_0$ platí:

$$\frac{1}{2}A \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 2A \qquad \textit{(jen šikovné epsilon)}$$

$$\frac{A}{2}b_n \leq a_n \leq 2Ab_n$$

“$\Rightarrow$”: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\overset{\text{V.3-}}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{2}b_n$ konverguje $\overset{\text{V.2-}}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje

“$\Leftarrow$”: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\overset{\text{V.2-}}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} 2Ab_n$ konverguje $\overset{\text{V.3-}}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje

(ii) Zvol $\varepsilon = 1$, pak $\exists\, n_0$ takové, že $a_n/b_n < 1$ pro $\forall n \geq n_0$, tedy $a_n < b_n$, V.3-.

(iii) Zvol $\varepsilon = 1$, pak $\exists\, n_0$ takové, že $a_n/b_n > 1$ pro $\forall n \geq n_0$, tedy $a_n > b_n$, V.3-.

Q.E.D.

Příklady:

(i) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{\sqrt{3+n+2n^8}} \overset{?}{\approx} \frac{n^3}{n^4} = \frac{1}{n}$$

$$a_n = \frac{n^3+1}{\sqrt{3+n+2n^8}}, \text{ zvol } b_n = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4+n}{\sqrt{3+n+2n^8}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \in (0,\infty)$$

Tedy dle (i) $\sum a_n$ konverguje $\Leftrightarrow \sum b_n$ konverguje. My ale víme, že $\sum b_n = \sum \frac{1}{n} = +\infty$ diverguje.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \qquad \textit{(diverguje)}$$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{15}}{3^n}$ $a_n = \frac{n^{15}}{3^n}$, zvol $b_n = 1/2^n$
Potom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{15}}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} = 0$$

indukcí, Bernoulli, ... (⟨cvičení⟩)
Navíc víme, že:

$$\sum b_n \text{ konverguje} \quad \textit{(geometrická řada)} \overset{\text{(ii)}}{\Rightarrow} \sum a_n \text{ konverguje}$$

VĚTA 5 (Cauchyovo odmocninové kritérium):

Nechť $\sum a_n$ je řada s nezápornými členy:

(i) Nechť $\exists\, q \in (0,1),\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 :\ \sqrt[n]{a_n} \leq q$. Pak $\sum a_n$ konverguje.
(ii) Nechť $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$. Pak $\sum a_n$ konverguje.
(iii) Nechť $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$. Pak $\sum a_n$ konverguje.
(iv) Nechť $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$. Pak $\sum a_n$ diverguje.
(v) Nechť $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$. Pak $\sum a_n$ diverguje.

DŮKAZ:

(i) Položme $b_n = q^n$, pak $a_n \leq b_n$ pro $n \geq n_0$. Dále $\sum b_n$ konverguje (geometrická řada, $q < 1$) $\overset{\text{V.3-}}{\Rightarrow}$ také $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
(ii) Označ $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A < 1$. Zvol $\varepsilon > 0$, $A + \varepsilon < 1$.

$$\exists\, n_0,\ \forall n \geq n_0 :\ \sup\{\sqrt[n]{a_k}, k \geq n\} \leq A + \varepsilon$$

Tedy $\sqrt[n]{a_n} \leq A + \varepsilon$, $n \geq n_0$.
Označ $q \overset{\text{def}}{=} A + \varepsilon < 1$, tvrzení plyne z V.-1.
(iii) Plyne z V.-2: $\exists \lim \Rightarrow \lim = \limsup$.
(iv)

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$$

$$\Rightarrow \exists \text{ vybraná posloupnost } \{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty},\ \sqrt[n_k]{a_{n_k}} > 1$$

$$\Rightarrow a_{n_k} > 1\ \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \text{ neplatí nutná podmínka } \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \sum\{a_n\}$$

Jiný pohled na poslední krok

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq \sum_{n=1}^{\infty} a_{n_k} \ \ \textit{(neboť } a_n \geq 0\textit{)} \ \ \geq \sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty$$

(v) Ihned plyne z V.-4.

Q.E.D.

VĚTA 6 (d'Alembertovo podílové kritérium):

Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy:

(i) $\exists\, q \in (0,1)$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \Rightarrow \sum a_n$ konverguje .

(ii) Nechť $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Pak $\sum a_n$ konverguje.

(iii) Nechť $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Pak $\sum a_n$ konverguje.

(iv) Nechť $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. Pak $\sum a_n$ diverguje.

DŮKAZ:

(i)

$$a_{n_0+1} \leq q a_{n_0}$$

$$a_{n_0+2} \leq q a_{n_0+1} \leq q a_{n_0}$$

$$a_{n_0+k} \leq q^k a_{n_0}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n + a_{n_0} \sum_{n=1}^{\infty} q^k}_{konverguje}$$

$$\overset{\text{V.3-}}{\Rightarrow} \sum a_n \text{ konverguje}$$

(ii) (i) $\Rightarrow$ (ii) (⟨cvičení⟩)

(iii) (ii) $\Rightarrow$ (iii) (⟨cvičení⟩)

(iv)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow \exists\, n_0,\ \forall n \Rightarrow n_0 :\ \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

$$\Rightarrow \{a_n\} \text{ je rostoucí od jistého indexu}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \overset{\text{V.1-}}{\Rightarrow} \sum a_n \text{ diverguje}$$

Q.E.D.

Poznámka o nebezpečích

(i) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1 \Rightarrow$ nevíme nic.

(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \Rightarrow$ nevíme nic.

Příklad:

$\sum \frac{1}{n}$ diverguje, $\sum \frac{1}{n^2}$ konverguje, obě mají limitu 1.

(iii) Parametr $q < 1$ je důležitý!

Příklad:

$$\sqrt[n]{a_n} < 1 \not\Rightarrow \sum a_n \text{ konverguje} \qquad \forall n \geq n_0$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \not\Rightarrow \sum a_n \text{ konverguje} \qquad \forall n \geq n_0$$

(iv) Jestliže $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, řada divergovat nemusí.

Příklad:

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ konverguje. Po zpřeházení také, ale limes superior už nesedí.

Příklad:

Vyšetřete, pro která $a \geq 0$ konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n^n}{n!}$.

Pozorování

(i) $a = 0$: $\sum a_n$ konverguje.

(ii) a moc velké: $\sum a_n$ diverguje.

(iii) $a = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty \Rightarrow \sum a_n$ konverguje.

Dle d'Alemberta:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a^{n+1}(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{a^n n^n} = a\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = a\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = ae$$

$$\Rightarrow a \in (0, 1/e) \Rightarrow \sum a_n \text{ konverguje}$$

$$\Rightarrow a \in (1/e, \infty) \Rightarrow \sum a_n \text{ diverguje}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{e} \Rightarrow \text{ nevíme nic}$$

Zbývající vyšetření

$$a = \frac{1}{e} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!}\right)$$

Diverguje, neboť

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!}\right) \neq 0$$

$\langle$cvičení$\rangle$

VĚTA 7 (Cauchyovo kondenzační kritérium):

Nechť $\sum a_n$ je řada s nezápornými členy a nechť $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $\forall n \geq n_0$ platí $a_{n+1} \leq a_n$. Pak:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ konverguje}$$

DŮKAZ:

"$\Leftarrow$": Přímo:
Nechť $\sum 2^n a_{2^n}$ konverguje. Označ:

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n$$
$$t_k = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^k a_{2^k}$$

Víme: $\lim\limits_{k\to\infty} t_k < \infty$
Potom k danému n $\exists\, k$: $n < 2^k$.

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n \\ &\leq a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + \cdots + a_7) + \cdots + (a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}) \\ &\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^k a_{2^k} = t_k \end{aligned}$$
$$\Rightarrow \forall n: \quad s_n \leq \lim_{t\to\infty} t_k \Rightarrow \ s_n \text{ je omezená } \ \Rightarrow \sum a_n \text{ konverguje}$$

"$\Rightarrow$": Nepřímo:
Nechť $\sum 2^n a_{2^n}$ diverguje.
Víme: $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = +\infty$
Potom k danému n $\exists\, k$: $n > 2^k$.

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n \\ &= a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + \cdots + a_7) + \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k}) \\ &\geq \frac{a_1}{2} + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots + 2^{k-1} a_{2^k} = \frac{1}{2} t_k \end{aligned}$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n \geq \lim_{k\to\infty} t_k = +\infty$$
$$\Rightarrow \sum a_n \text{ diverguje}$$

Q.E.D.

Příklad:

Pro která $\alpha \in \mathbb{R}$ konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$?

Z původních kritérií nevyplývá nic, neboť $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^\alpha}} = 1$, $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} = 1$. Navíc víme, že řada konverguje pro $\alpha = 2$ a diverguje pro $\alpha = 1$. Pro $\alpha \leq 0$ diverguje také. Pro $\alpha > 0$ je $\frac{1}{n^\alpha}$ klesající, tedy lze užít V.7-.

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ konverguje } \overset{\text{V.7-}}{\Longleftrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha}\right) \text{ konverguje}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n \text{ konverguje}$$
$$\Leftrightarrow \alpha > 1 \ \textit{(geometrická řada)}$$

Závěr

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ konverguje } \ \Leftrightarrow \alpha > 1$$

Příklad:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^{\alpha} n} \text{ konverguje } \Leftrightarrow \alpha > 1$$

DŮKAZ:

$$\sum \text{ konverguje } \Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \left(2^n \frac{1}{2^n \log^{\alpha} 2^n} \right) \text{ konverguje } \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log^{\alpha} 2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ konverguje } \Leftrightarrow \alpha > 1$$

VĚTA 8 (Raabeovo kriterium):

Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy.

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ konverguje}$$

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ diverguje}$$

Příklad:

$$\sum a_n, \;\; a_n = \left(\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots 3n} \right)^2$$

⟨cvičení⟩