VĚTA 1 (nutná podmínka konvergence řady):

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Pozorování

Pro geometrickou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje } \iff \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

(Implikace však neplatí pro všechny řady.)

DŮKAZ:

Nechť $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, pak $s \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

$$\lim_{n\to\infty} s_{n+1} = s$$

$$0 = s - s = \lim_{n\to\infty} s_{n+1} - \lim_{n\to\infty} s_n \overset{\text{VOAL}}{=} \lim_{n\to\infty} (s_{n+1} - s_n) = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Q.E.D.

Varování

Implikaci nelze obrátit (tedy podmínka není postačující).

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \not\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje}$$

Příklad:

Harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$:

$$s_m = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}$$

$$s_{2m} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{2m}$$

$$\begin{aligned} s_{2m} - s_m &= \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{2m} \\ &\geq \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} + \cdots + \frac{1}{2m} \\ &= m\frac{1}{2m} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$s_{2m} - s_m \geq \frac{1}{2} \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

Tedy neplatí Bolzano-Cauchyova podmínka:

$$\overset{\text{V2.12-}}{\geq} \lim_{n\to\infty} s_m = +\infty$$