

Chceme definovat transcendentní funkce, zejména:

- exp, log, a^x
- goniometrické funkce (sin, cos, tg, cotg)
- cyklometrické funkce (arcsin, arccos, arctg, arccotg)
- hyperbolické funkce (sinh, cosh, tgh, cotgh)

VĚTA 13 (zavedení exponenciální funkce):

∃! reálná funkce “exp” splňující axiomy:

- (i) $\exp(x + y) = \exp x \cdot \exp y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
 (ii) $\exp x \geq 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

DŮKAZ:

(A) Jednoznačnost (předpokládáme, že existuje):

- (1) $\exp(mx) = (\exp x)^m \quad \forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$: Triviálně indukci z (i).
 (2) $\exp(0) = 1$:

$$\exp(0) = \exp(0 + 0) \stackrel{(i)}{=} \exp(0)^2 \Rightarrow \exp(0) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{ nikdy — (ii)}$$

- (3) $\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$:

$$1 = \exp(0) = \exp(x - x) = \exp(x) \cdot \exp(-x)$$

- (4) $\exp x \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$: Ihned plyne z (3).
 (5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp x = +\infty$: Ihned plyne z (ii) — dolní policajt $(1 + x)$.
 (6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = 0$: Kombinace (3) a (5).
 (7) $\exp x > 1 \quad \forall x > 0$: Ihned z (ii).
 (8) $\exp \nearrow$ na \mathbb{R} :

$$x < y \Rightarrow 1 \stackrel{(7)}{<} \exp(y - x) = \frac{\exp y}{\exp x} \Rightarrow \exp y > \exp x$$

- (9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1$ (!)

$$\frac{1}{\exp x} \stackrel{(3)}{=} \exp(-x) \stackrel{(ii)}{\geq} 1 - x$$

To znamená:

$$\begin{aligned} 1 + x &\stackrel{(ii)}{\leq} \exp x \leq \frac{1}{1 - x} \\ \Rightarrow x &\leq \exp x - 1 \leq \frac{1}{1 - x} - 1 = \frac{x}{1 - x} \\ \Rightarrow \underbrace{1}_{\rightarrow 1} &\leq \underbrace{\frac{\exp x - 1}{x}}_{\rightarrow 1} \leq \underbrace{\frac{1}{1 - x}}_{\rightarrow 1} \end{aligned}$$

- (10) exp je spojitá na \mathbb{R} :
Pro $\forall a \in \mathbb{R}$ musí platit:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (\exp x - \exp a) &= \lim_{x \rightarrow a} \exp a \cdot \left(\frac{\exp x}{\exp a} - 1 \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \underbrace{\exp a}_{\rightarrow \exp a} \underbrace{\left(\frac{\exp(x-a) - 1}{x-a} \right)}_{\substack{(9) \\ \rightarrow 1}} \underbrace{(x-a)}_{\rightarrow 0} \stackrel{\text{VOAL}}{=} 0 \end{aligned}$$

- (11) $\exp x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (!!)

Takto při definici limitou také dokážeme jednoznačnost — limity jsou jednoznačné.

$$\exp \left(-\frac{x}{n} \right) \stackrel{(ii)}{\geq} 1 - \frac{x}{n}$$

To znamená:

$$\forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} : \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \leq \exp x \leq \left(1 - \frac{x}{n} \right)^{-n}$$

$$\forall x > 0 : \underbrace{1}_{\rightarrow 1} \leq \frac{\exp x}{\left(1 + \frac{x}{n} \right)^n} \leq \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right)^{-n}}_{\rightarrow 1} \stackrel{\text{Bernoulli}}{\leq} \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{n} \right)^{-1}}_{\rightarrow 1}$$

(pro dost velká n)

- (B) Existence:

Dokazujeme existenci $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$.

1. krok

$\left\{ \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \right\}$ je rostoucí pro $x > 0$.

Použijeme AG-nerovnost ve tvaru

$$\sqrt[n+1]{a_1 \dots a_{n+1}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1}}{n+1}$$

pro $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1 + \frac{x}{n}$, $a_{n+1} = 1$:

$$\sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{x}{n} \right)^n} \stackrel{\text{AG}}{\leq} \frac{\left(1 + \frac{x}{n} \right) n + 1}{n+1} = 1 + \frac{x}{n+1}$$

$$\left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \leq \left(1 + \frac{x}{n+1} \right)^{n+1}$$

Tedy je posloupnost $\left\{ \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \right\}$ rostoucí.

2. krok

Posloupnost $\left\{ \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \right\}$ je omezená.

Víme, že je monotónní, tedy stačí dokázat, že nějaká podposloupnost je omezená.

Tvrzení: $\{a_n\}$ monotónní a $\{a_{n_k}\}$ omezená $\Rightarrow \{a_n\}$ omezená. Důkaz: (cvičení).

Dokážeme, že

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \exists k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : \left(1 + \frac{x}{nk} \right)^{nk} \leq \left(1 - \frac{x}{k} \right)^k$$

Potřebuji k tak velké, aby $\frac{x}{k+x} < 2$, tj. aby platil Bernoulli.

$$\left(1 + \frac{x}{nk}\right)^{-n} = \left(\frac{nk+x}{nk}\right)^{-n} = \left(\frac{nk}{nk+x}\right)^n = \left(x - \frac{x}{nk+x}\right)^n$$

$$\stackrel{\text{Bernoulli}}{\geq} 1 - \frac{nx}{nk+x} \geq 1 - \frac{x}{k}, \text{ umocnit na } k$$

Poslední nerovnost platí, neboť $nkx \leq nkx + x^2$.

Q.E.D.

Poznámky:

- (i) $\exp(0) = 1$
- (ii) $\exp(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$
- (iii) \exp je rostoucí, $\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty) \Rightarrow \exp$ má inverzní funkci na $(0, \infty)$. Tuto funkci nazveme přirozeným logaritmem, značíme “log”.
- (iv) $a > 0$, def. $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$

VĚTA 14 (základní vlastnosti logaritmu):

Funkce \log , definovaná předpisem

$$\log = \exp^{-1}$$

má následující vlastnosti:

- (i) $D(\log) = (0, \infty)$, $\log: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$
- (ii) $\log(xy) = \log x + \log y \quad \forall x, y \in (0, \infty)$, $\log(x^n) = n \log x$
- (iii) \log je spojitý, rostoucí na $(0, \infty)$, $\log 1 = 0$, $\log e = 1$, $\log 1/x = -\log x$
- (iv) Základní limity:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(x+1)}{x} = 1$$

DŮKAZ:

Plyne z odpovídajících vlastností funkce \exp . (cvičení)
Q.E.D.

Obecná mocnina

$a > 0$ (!), $b \in \mathbb{R}$, pak definuji

$$a^b \stackrel{\text{def}}{=} \exp(b \log a)$$

Speciálně, definuji funkci $a^x \stackrel{\text{def}}{=} \exp(x \log a)$. Pro $a = e$: $e^x = \exp x$.

Poznámka:

$$x^2 = e^{2 \log x} = e^{\log x + \log x} = e^{\log x} \cdot e^{\log x} = x \cdot x = x^2$$

Sinus

Co od něj chceme?

- definovaná na \mathbb{R}
- spojitá
- 2π -periodická
- omezená
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- součtové vzorce
- pevné body:

$$\sin(0) = 0, \sin(\pi/2) = 1, \sin(\pi) = 0$$

$$\sin(0) = 1, \sin(\pi/2) = 0, \sin(\pi) = -1$$

Středoškolská definice

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

Ale v čem měřím α ? Ve stupních vznikne něco “rozňácaného”, ale s radiány se dostáváme do kruhu, neboť nemáme definovanou obloukovou vzdálenost. Tu bych musel matematicky definovat zase přes sin.

VĚTA 15 (goniometrické funkce):

$\exists!$ reálná funkce s a $\exists!$ reálná funkce c takové, že:

(i)

$$s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y)$$

$$c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y)$$

(ii) s lichá, c sudá (na \mathbb{R})

(iii) $s > 0$ na $(0, 1)$, $s(1) = 0$

DŮKAZ:

Nechť takové funkce existují. Pak:

(1) $s(0) = 0$ (z lichosti)
 $c(0) = 1$:

$$c(x+(-x)) = c(x)c(-x) - s(x)s(-x) \stackrel{\text{sudost}}{=} c^2(x) + s^2(x)$$

$$c(0) = c(0+0) = c^2(0) + s^2(0) = c^2(0) \Rightarrow c(0) = 1$$

T-O-D-O: Ale to platí i pro $c(0) = 0 \dots$!?

(2) $c^2(x) + s^2(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Plyne z předchozího — ekvivalentní k $c(x+(-x)) = c(0) = 1$.

$$(3) \quad \forall x \in \mathbb{R} : \begin{aligned} s(2x) &= 2s(x)c(x) \\ c(2x) &= c^2(x) - s^2(x) \end{aligned}$$

Ihned plyne z (i).

$$(4) \quad s(1/2) = 1, \quad c(1/2) = 0$$

$$0 \stackrel{(iii)}{=} s(1) \stackrel{(3)}{=} 2 \underbrace{s(1/2)}_{>0 \text{ (iii)}} c(1/2) \Rightarrow c(1/2) = 0$$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow} s(1/2) = 1$$

$$(5) \quad c(1) = -1$$

$$c(1) = c(2 \cdot 1/2) \stackrel{(3)}{=} c^2(1/2) - s^2(1/2) = 0 - 1$$

$$(6) \quad s(x+1) = -s(x) \text{ (antiperiodicita):}$$

$$s(x+1) = s(x) \underbrace{c(1)}_{-1} + c(x) \underbrace{s(1)}_0 = -s(x)$$

$$s(x+2) = s(x) \text{ (periodicita):}$$

$$\begin{aligned} s(x+2) &= s(x)c(2 \cdot 1) + c(x)s(2 \cdot 1) \\ &= s(x) \underbrace{(c^2(1) - s^2(1))}_1 + c(x) \underbrace{(2s(1)c(1))}_0 \\ &= s(x) \end{aligned}$$

$$(7) \quad s(1/2 - x) = c(x)$$

$$s(1/2 - x) = \underbrace{s(1/2)}_1 c(x) - \underbrace{c(1/2)}_0 s(x) = c(x)$$

$$(8) \quad c > 0 \text{ na } (0, 1/2) \text{ — z (7) a (iii)}$$

$$(9) \quad s \text{ je rostoucí na } (0, 1/2), \quad c \text{ je klesající na } (0, 1/2).$$

Volíme x, y tak, aby $0 < x - y < x < 1/2$ (tedy také $0 < y < x$),

$$\begin{aligned} s(x-y) &= s(x) \underbrace{c(y)}_{\leq 1} - \underbrace{c(x)s(y)}_{>0 \text{ (8), (iii)}} \\ &\leq s(x) \end{aligned}$$

(10-)

$$\begin{aligned} c(1/2^n) &= \sqrt{\frac{1 + c1/2^{n-1}}{2}} \\ s(1/2^n) &= \sqrt{\frac{1 - c1/2^{n-1}}{2}} \end{aligned}$$

⟨cvičení⟩

(10) s, c spojitě v bodě 0.

V bodech $k2^{-n}$ definujeme funkce s, c dle (10-). V ostatních bodech ($x \neq k2^{-n}$) pak limitně supremem:

$$x \neq k2^{-n} : s(x) = \sup\{s(y), y = k2^{-n}, y < x\}, \quad x \in (0, 1/2)$$

Stačí definovat na $(0, 1/2)$, na zbytku nedefinujeme z periodicity a antiperiodicity.

$a_n := c(1/2^n)$, pak $a_{n+1} = \sqrt{\frac{1+a_n}{2}}$. Podle (9) je a_n rostoucí a omezená $\Rightarrow \lim a_n = A$, $A = \sqrt{\frac{1+A}{2}} \Rightarrow A = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} s(x) = 0 \Rightarrow c$ je spojitě.

(11) $s(a) - s(b) = 2s\left(\frac{a-b}{2}\right)c\left(\frac{a+b}{2}\right)$
 (cvičení): Z (i).

(12) s, c spojité na \mathbb{R} :

$$\lim_{x \rightarrow a} (s(x) - s(a)) \stackrel{\text{(ii)}}{=} 2 \lim_{x \rightarrow a} \underbrace{s\left(\frac{x-a}{2}\right)}_{\rightarrow 0} \underbrace{c\left(\frac{x+a}{2}\right)}_{\leq 1}$$

(13) Existuje vlastní $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{s(x)}{x} = \pi$. (**Důležité!**)

$$t(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{s(x)}{c(x)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1/2 + k\}$$

Potom t je lichá, rostoucí na $(-1/2, 1/2)$ a

$$t(x+y) = \frac{t(x) + t(y)}{1 - t(x)t(y)}$$

$$t(1/4) = 1$$

$$x, y \in (0, 1/4) : \begin{aligned} t(x+y) &\geq t(x) + t(y) \\ s(x+y) &\leq s(x) + s(y) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow t(x) \geq s(x)$$

$$\Rightarrow \forall k, m, n \in \mathbb{N}, k2^{-n} \in (0, 1/4) :$$

$$t(k2^{-n}) \geq kt(2^{-n}) \geq ks(2^{-n}) \geq \frac{k}{m}s(2^{-n}m)$$

$$\Rightarrow \frac{t(k2^{-n})}{k2^{-n}} \geq \frac{s(2^{-n}m)}{m2^{-n}}$$

$$\Rightarrow \frac{t(y)}{y} \geq \frac{s(y)}{y} \quad \forall x, y \in (0, 1/2)$$

Definujeme $\pi := \inf_{y \in (0, 1/2)} \frac{t(y)}{y}$.

$$\underbrace{\pi}_{\rightarrow \pi} \geq \underbrace{\frac{s(x)}{x} = \frac{t(x)}{x} c(x)}_{\rightarrow \pi(\text{policie})} \geq \underbrace{\pi c(x)}_{\rightarrow \pi 1}$$

Q.E.D.

Definujeme:

$$\sin(x) = s\left(\frac{x}{\pi}\right)$$

$$\cos(x) = c\left(\frac{x}{\pi}\right)$$

$$\text{tg}(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\text{cotg}(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Pak bude platit:

- (i) \sin, \cos jsou 2π -periodické, π -antiperiodické a spojité na \mathbb{R}
- (ii) \sin je rostoucí na $(-\pi/2, \pi/2)$
- (iii) \cos je klesající na $(0, \pi)$

(iv) Základní limity:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \sin x)} = 1/2$$

Poznámky:

(i) Alternativní způsob:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

$$E(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Buď můžeme dokázat pomocí odhadů, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!},$$

nebo dokázat, že:

$$E(x + y) = E(x) \cdot E(y) \text{ (součin řad)}$$

$$E(x) \geq 1 + x \text{ (pro } x > 0 \text{ triviální)}$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

(ii) Základní limity:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$a > 0: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{e^{x \log a} - 1}{x \log a}}_{\rightarrow 1} \log a = \log a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + \cos x}}_{\rightarrow 1/2} = 1/2$$

Tedy v nule se $e^x - 1$ a $\sin x$ chovají v okolí nuly stejně jako lineární, $1 - \cos x$ jako kvadratické.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} x = 0$$