Chceme definovat transcendentní funkce, zejména:

- exp, log, a^x
- goniometrické funkce (sin, cos, tg, cotg)
- cyklometrické funkce (arcsin, arccos, arctg, arccotg)
- hyperbolické funkce (sinh, cosh, tgh, cotgh)

VĚTA 13 (zavedení exponenciální funkce):

$\exists!$ reálná funkce "exp" splňující axiomy:

(i) $\exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(ii) $\exp x \geq 1 + x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

DŮKAZ:

(A) Jednoznačnost (předpokládáme, že existuje):

(1) $\exp(mx) = (\exp x)^m \quad \forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$: Triviálně indukcí z (i).

(2) $\exp(0) = 1$:

$$\exp(0) = \exp(0+0) \overset{\text{(i)}}{=} \exp(0)^2 \Rightarrow \exp(0) = \begin{cases} 1 & \\ 0 & \text{nikdy — (ii)} \end{cases}$$

(3) $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp x}$:

$$1 = \exp(0) = \exp(x-x) = \exp(x) \cdot \exp(-x)$$

(4) $\exp x \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$: Ihned plyne z (3).

(5) $\lim\limits_{x \to \infty} \exp x = +\infty$: Ihned plyne z (ii) — dolní policajt $(1+x)$.

(6) $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp x = 0$: Kombinace (3) a (5).

(7) $\exp x > 1 \quad \forall x > 0$: Ihned z (ii).

(8) exp $\nearrow$ na $\mathbb{R}$:

$$x < y \Rightarrow 1 \overset{(7)}{<} \exp(y-x) = \frac{\exp y}{\exp x} \Rightarrow \exp y > \exp x$$

(9) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\exp x - 1}{x} = 1$ (!)

$$\frac{1}{\exp x} \overset{(3)}{=} \exp(-x) \overset{\text{(ii)}}{\geq} 1 - x$$

To znamená:

$$1 + x \overset{\text{(ii)}}{\leq} \exp x \leq \frac{1}{1-x}$$

$$\Rightarrow x \leq \exp x - 1 \leq \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$$

$$\Rightarrow \underbrace{1}_{\to 1} \leq \underbrace{\frac{\exp x - 1}{x}}_{\to 1} \leq \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{\to 1}$$

(10) exp je spojitá na $\mathbb{R}$:
Pro $\forall a \in \mathbb{R}$ musí platit:

$$\lim_{x\to a}(\exp x - \exp a) = \lim_{x\to a} \exp a \cdot \left(\frac{\exp x}{\exp a} - 1\right) =$$

$$= \lim_{x\to a} \underbrace{\underbrace{\exp a}_{\to \exp a} \left(\frac{\exp(x-a)-1}{x-a}\right)}_{\overset{(9)}{\to} 1} \underbrace{(x-a)}_{\to 0} \overset{\text{VOAL}}{=} 0$$

(11) $\exp x = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (!!)
Takto při definici limitou také dokážeme jednoznačnost — limity jsou jednoznačné.

$$\exp\left(-\frac{x}{n}\right) \overset{\text{(ii)}}{\geq} 1 - \frac{x}{n}$$

To znamená:

$$\forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} : \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \exp x \leq \left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}$$

$$\forall x > 0 : \underbrace{1}_{\to 1} \leq \frac{\exp x}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} \leq \underbrace{\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^{-n}}_{\to 1} \overset{\text{Bernoulli}}{\leq} \underbrace{\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^{-1}}_{\to 1}$$

(pro dost velká n)

(B) Existence:
Dokazujeme existenci $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$.

1. krok
$\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\}$ je rostoucí pro $x > 0$.
Použijeme AG-nerovnost ve tvaru

$$\sqrt[n+1]{a_1 \dots a_{n+1}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1}}{n+1}$$

pro $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1 + \frac{x}{n}$, $a_{n+1} = 1$:

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} \overset{\text{AG}}{\leq} \frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)n + 1}{n+1} = 1 + \frac{x}{n+1}$$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$$

Tedy je posloupnost $\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\}$ rostoucí.

2. krok
Posloupnost $\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\}$ je omezená.
Víme, že je monotónní, tedy stačí dokázat, že nějaká podposloupnost je omezená.
Tvrzení: $\{a_n\}$ monotónní a $\{a_{n_k}\}$ omezená $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ omezená. Důkaz: $\langle$cvičení$\rangle$.
Dokážeme, že

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \ \exists k \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} : \left(1+\frac{x}{nk}\right)^{nk} \leq \left(1-\frac{x}{k}\right)^k$$

Potřebuji k tak velké, aby $\dfrac{x}{k+x} < 2$, tj. aby platil Bernoulli.

$$\left(1+\frac{x}{nk}\right)^{-n} = \left(\frac{nk+x}{nk}\right)^{-n} = \left(\frac{nk}{nk+x}\right)^{n} = \left(x - \frac{x}{nk+x}\right)^{n}$$

$$\overset{\text{Bernoulli}}{\geq} 1 - \frac{nx}{nk+x} \geq 1 - \frac{x}{k}, \text{ umocnit na } k$$

Poslední nerovnost platí, neboť $nkx \leq nkx + x^2$.

Q.E.D.

Poznámky:

- **(i)** $\exp(0) = 1$
- **(ii)** $\exp(1) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$
- **(iii)** exp je rostoucí, $\exp\colon \mathbb{R} \to (0,\infty) \Rightarrow$ exp má inverzní funkci na $(0,\infty)$. Tuto funkci nazveme přirozeným logaritmem, značíme “log”.
- **(iv)** $a > 0$, def. $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$

VĚTA 14 (základní vlastnosti logaritmu):

Funkce log, definovaná předpisem

$$\log = \exp^{-1}$$

má následující vlastnosti:

- **(i)** $D(\log) = (0,\infty)$, $\log\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$
- **(ii)** $\log(xy) = \log x + \log y \quad \forall x, y \in (0,\infty)$, $\log(x^n) = n \log x$
- **(iii)** log je spojitý, rostoucí na $(0,\infty)$, $\log 1 = 0$, $\log e = 1$, $\log 1/x = -\log x$
- **(iv)** Základní limity:

$$\lim_{x\to 0_+} \log x = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \log x = \infty$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\log(x+1)}{x} = 1$$

DŮKAZ:

Plyne z odpovídajících vlastností funkce exp. $\langle$cvičení$\rangle$
Q.E.D.

Obecná mocnina

$a > 0$ (!), $b \in \mathbb{R}$, pak definuji

$$a^b \overset{\text{def}}{=} \exp(b \log a)$$

Speciálně, definuji funkci $a^x \overset{\text{def}}{=} \exp(x \log a)$. Pro $a = e$: $e^x = \exp x$.

Poznámka:

$$x^2 = e^{2\log x} = e^{\log x + \log x} = e^{\log x} \cdot e^{\log x} = x \cdot x = x^2$$

Sinus

Co od něj chceme?

- definovaná na $\mathbb{R}$
- spojitá
- 2π-periodická
- omezená
- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- součtové vzorce
- pevné body:

$$\sin(0) = 0,\ \sin(\pi/2) = 1,\ \sin(\pi) = 0$$
$$\sin(0) = 1,\ \sin(\pi/2) = 0,\ \sin(\pi) = -1$$

Středoškolská definice

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Ale v čem měřím α? Ve stupních vznikne něco "rozhňácaného", ale s radiány se dostáváme do kruhu, neboť nemáme definovánu obloukovou vzdálenost. Tu bych musel matematicky definovat zase přes sin.

VĚTA 15 (goniometrické funkce):

$\exists!$ reálná funkce s a $\exists!$ reálná funkce c takové, že:

(i)

$$s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y)$$
$$c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y)$$

(ii) s lichá, c sudá (na $\mathbb{R}$)

(iii) $s > 0$ na $(0,1)$, $s(1) = 0$

DŮKAZ:

Nechť takové funkce existují. Pak:

(1) $s(0) = 0$ (z lichosti)
$c(0) = 1$:

$$c(x+(-x)) = c(x)c(-x) - s(x)s(-x) \overset{\text{sudost}}{=} c^2(x) + s^2(x)$$

$$c(0) = c(0+0) = c^2(0) + s^2(0) = c^2(0) \Rightarrow c(0) = 1$$

T-O-D-O: Ale to platí i pro $c(0) = 0 \ldots$?!

(2) $c^2(x) + s^2(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
Plyne z předchozího — ekvivalentní k $c(x+(-x)) = c(0) = 1$.

(3) $\forall x \in \mathbb{R}: \; s(2x) = 2s(x)c(x)$

$\qquad c(2x) = c^2(x) - s^2(x)$

Ihned plyne z (i).

(4) $s\,(1/2) = 1, \; c\,(1/2) = 0$

$$0 \overset{\text{(iii)}}{=} s(1) \overset{(3)}{=} 2\,\underbrace{s\,(1/2)}_{>0 \text{ (iii)}}\,c\,(1/2) \Rightarrow c\,(1/2) = 0$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} s\,(1/2) = 1$$

(5) $c(1) = -1$

$$c(1) = c\,(2 \cdot 1/2) \overset{(3)}{=} c^2\,(1/2) - s^2\,(1/2) = 0 - 1$$

(6) $s(x+1) = -s(x)$ (antiperiodicita):

$$s(x+1) = s(x)\,\underbrace{c(1)}_{-1} + c(x)\,\underbrace{s(1)}_{0} = -s(x)$$

$s(x+2) = s(x)$ (periodicita):

$$\begin{aligned} s(x+2) &= s(x)c(2 \cdot 1) + c(x)s(2 \cdot 1) \\ &= s(x)\,\underbrace{\left(c^2(1) - s^2(1)\right)}_{1} + c(x)\,\underbrace{\left(2s(1)c(1)\right)}_{0} \\ &= s(x) \end{aligned}$$

(7) $s\,(1/2 - x) = c(x)$

$$s\,(1/2 - x) = \underbrace{s\,(1/2)}_{1}\,c(x) - \underbrace{c\,(1/2)}_{0}\,s(x) = c(x)$$

(8) $c > 0$ na $(0, 1/2)$ — z (7) a (iii)

(9) s je rostoucí na $(0, 1/2)$, c je klesající na $(0, 1/2)$.
Volíme x, y tak, aby $0 < x - y < x < 1/2$ (tedy také $0 < y < x$),

$$\begin{aligned} s(x-y) &= s(x)\,\underbrace{c(y)}_{\leq 1} - \underbrace{c(x)s(y)}_{>0 \text{ (8), (iii)}} \\ &\leq s(x) \end{aligned}$$

(10-)

$$c\,(1/2^n) = \sqrt{\frac{1 + c1/2^{n-1}}{2}}$$

$$s\,(1/2^n) = \sqrt{\frac{1 - c1/2^{n-1}}{2}}$$

⟨cvičení⟩

(10) s, c spojité v bodě 0.
V bodech $k2^{-n}$ definujeme funkce s, c dle (10–). V ostatních bodech ($x \neq k2^{-n}$) pak limitně supremem:

$$x \neq k2^{-n}: \; s(x) = \sup\{s(y), y = k2^{-n}, y < x\}, \; x \in (0, 1/2)$$

Stačí definovat na $(0, 1/2)$, na zbytku nadefinujeme z periodicity a antiperiodicity.
$a_n := c\,(1/2^n)$, pak $a_{n+1} = \sqrt{\frac{1+a_n}{2}}$. Podle (9) je a_n rostoucí a omezená $\Rightarrow \lim a_n = A$, $A = \sqrt{\frac{1+A}{2}} \Rightarrow A = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0} s(0) = 0 \Rightarrow c$ je spojité.

(11) $s(a) - s(b) = 2s\left(\frac{a-b}{2}\right) c\left(\frac{a+b}{2}\right)$
⟨cvičení⟩: Z (i).

(12) s, c spojité na $\mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to a}(s(x) - s(a)) \overset{\text{(ii)}}{=} 2\lim_{x\to a} \underbrace{s\left(\frac{x-a}{2}\right)}_{\to 0} \underbrace{c\left(\frac{x+a}{2}\right)}_{\leq 1}$$

(13) Existuje vlastní $\lim_{x\to 0} \frac{s(x)}{x} = \pi$. **(Důležité!)**

$$t(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{s(x)}{c(x)},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{1/2 + k\}$$

Potom t je lichá, rostoucí na $(-1/2, 1/2)$ a

$$t(x+y) = \frac{t(x) + t(y)}{1 - t(x)t(y)}$$

$$t\,(1/4) = 1$$

$$\begin{aligned} x, y \in (0, 1/4) :\ & t(x+y) \geq t(x) + t(y) \\ & s(x+y) \leq s(x) + s(y) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow t(x) \geq s(x)$$

$$\Rightarrow\ \forall k, m, n \in \mathbb{N},\ k2^{-n} \in (0, 1/4) :$$

$$t(k2^{-n}) \geq kt(2^{-n}) \geq ks(2^{-n}) \geq \frac{k}{m} s(2^{-n}m)$$

$$\Rightarrow \frac{t(k2^{-n})}{k2^{-n}} \geq \frac{s(2^{-n}m)}{m2^{-n}}$$

$$\Rightarrow \frac{t(y)}{y} \geq \frac{s(y)}{y} \qquad \forall x, y \in (0, 1/2)$$

Definujeme $\pi := \inf_{y\in(0,1/2)} \frac{t(y)}{y}$.

$$\underbrace{\pi}_{\to\pi} \geq \underbrace{\frac{s(x)}{x} = \frac{t(x)}{x} c(x)}_{\to\pi(policie)} \geq \underbrace{\pi c(x)}_{\to\pi 1}$$

Q.E.D.

Definujeme:

$$\begin{aligned} \sin(x) &= s\left(\frac{x}{\pi}\right) \\ \cos(x) &= c\left(\frac{x}{\pi}\right) \\ \mathrm{tg}(x) &= \frac{\sin x}{\cos x} \\ \mathrm{cotg}(x) &= \frac{\cos x}{\sin x} \end{aligned}$$

Pak bude platit:

(i) $\sin, \cos$ jsou 2π–periodické, π–antiperiodické a spojité na $\mathbb{R}$
(ii) $\sin$ je rostoucí na $(-\pi/2, \pi/2)$
(iii) $\cos$ je klesající na $(0, \pi)$

(iv) Základní limity:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\sin x)} = 1/2$$

Poznámky:

(i) Alternativní způsob:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots$$

$$E(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \stackrel{?}{=} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Buď můžeme dokázat pomocí odhadů, že

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!},$$

nebo dokázat, že:

$$E(x+y) = E(x)\cdot E(y) \ \ \textit{(součin řad)}$$

$$E(x) \geq 1 + x \ \ \textit{(pro } y > 0 \textit{ triviální)}$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2 n}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

(ii) Základní limity:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$a > 0: \ \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\log a} - 1}{\underbrace{x \log a}_{\to 1}} \log a = \log a$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\cos x}}_{\to 1/2} = 1/2$$

Tedy v nule se $e^x - 1$ a $\sin x$ chovají v okolí nuly stejně jako lineární, $1 - \cos x$ jako kvadratické.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} x = 0$$