

Luboš Pick

Matematická analýza I

Přepsal Petr Baudiš
v ak. roce 2004/2005

“Když ji miluješ, není co řešit.”

© 2004/2005 Luboš Pick, Petr Baudiš

Verze 1.61/L:1.616. Tato verze není garantována, nemusí být kompletní a může obsahovat chyby.

Aktuální verzi vždy najdete na <http://math.or.cz/>.

Sazba v programu \TeX .

Úvod do matematické analýzy

Výroková logika

Definice:

Logika: věda o správnosti výroků.

Výrok: tvrzení, o kterém má smysl říci, zda je pravdivé nebo ne. Obvykle ve formě “premise \Rightarrow důsledek”. Tarskiho definice: “Výrok A je pravdivý, jestliže A .”

Příklad:

$$(A \Rightarrow B) \iff (\neg B \Rightarrow \neg A) \\ \iff \neg(A \wedge \neg B)$$

Výroková funkce: výraz, z něž obdržíme výrok po dosazení prvků za proměnné. Zapisujeme $V(x_1, \dots, x_n)$, $x_n \in M_n$.

Kvantifikátory: všeobecný (\forall) a existenční (\exists). Platí **princip stejnoměrnosti:**

$$\forall x \exists y : V(x, y) \iff \exists y \forall x : V(x, y)$$

Základní metody důkazů

Používáme zejména důkazy sporem, indukci, přímo a nepřímo. Je záhodno se vyhnout důkazu kruhem.

Při dokazování je vhodné si uvědomit formální definici dokazovaného výroku a aplikovat ji na náš konkrétní případ (např. dokazujeme-li existenci limity, může pomoci vyjít z dosazení do její definice).

Tvrzení: Pro $\forall n \in \mathbb{N} : n^2$ liché $\Rightarrow n$ liché. **Důkazy:**

(i) Přímo:

$$n^2 = p_1^2 \cdots p_k^2 \quad (\text{prvočíselný rozklad})$$

$$n = p_1 \cdots p_k$$

$$j = 1, \dots, k : p_j \neq 2 \Rightarrow n \text{ liché}$$

(ii) Nepřímo:

$$n \text{ sudé} \Rightarrow n = 2m \Rightarrow n^2 = 4m^2 \Rightarrow n^2 \text{ sudé}$$

(iii) Sporem:

$$n^2 \text{ liché} \wedge n \text{ sudé}$$

$$\implies n^2 + n \text{ liché} \implies n(n+1) \text{ liché}$$

✗ *Spor*

(iv) Indukcí:

$n = 1$: 1^2 liché, 1 liché.

$n \Rightarrow n + 2$: n^2 liché $\Rightarrow (n + 2)^2$ liché (neboť $(n + 2)^2 = n^2 + 2n + 4 = 2n + 5$ je liché).

Q.E.D.

Další příklady:

- **Přímo:** $A \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow C_n \Rightarrow B$

Cauchyho nerovnost:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$$

$$\forall m \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$$

- (1) $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, tedy platí.
- (2) $\exists i \in \{1, \dots, n\} : a_i \neq 0$.

Trik: Definujme si:

$$f(x) := \sum_{i=1}^n (a_i x + b_i)^2$$

Pak platí:

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) x^2 + \left(\sum_{i=1}^n 2a_i b_i \right) x + \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

$$\alpha > 0, f(x) > 0 \stackrel{\text{z grafu}}{\implies} D \leq 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma \leq 0$$

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma \leq 0 \implies \beta^2 \leq 4\alpha\gamma = 4 \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq 4 \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$$

Q.E.D.

- **Sporem:** Předpokládáme opak a dokážeme jeho neplatnost.

Iracionalita $\sqrt{2}$:

$$x > 0 : x^2 = 2 \Rightarrow x \notin \mathbb{Q}$$

Nechť $x = p/q$, kde p, q jsou nesoudělná:

$$x^2 = 2 \implies p^2/q^2 = 2 \implies p^2 = 2q^2$$

$$p^2 = 4m \implies q^2 = 2m$$

To je ale spor s nesoudělností p, q .

Q.E.D.

- **Indukcí:** Dokazujeme, že pro $\forall n \in \mathbb{N} : V(n)$. Stačí dokázat:

- (i) $V(1)$
- (ii) $V(n) \Rightarrow V(n+1)$

Bernoulliho nerovnost:

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N}, x \geq -1$$

- (1) $n = 1$:
 $1+x \geq 1+x$

(2) $V(n) \Rightarrow V(n+1)$:

$$(1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$$

Q.E.D.

A-G nerovnost:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_1, a_2, \dots, a_n > 0$$

$V(1)$ je triviální.

$V(2)$: $(a_1 + a_2)/2 \geq \sqrt{a_1 a_2}$. Nechť $a = A^2$ a $b = B^2$:

$$(A - B)^2 = A^2 + B^2 - 2AB \geq 0$$

$V(n) \Rightarrow V(2n)$:

$$\begin{aligned} & \frac{a_1 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots + a_{2n}}{2n} = \\ & = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} + \frac{a_{n+1} + \dots + a_{2n}}{n} \geq \\ & \stackrel{V(2)}{\geq} \sqrt[2]{\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{a_{n+1} + \dots + a_{2n}}{n}} \geq \\ & \stackrel{V(n)}{\geq} \sqrt[2]{\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \cdot \sqrt[n]{a_{n+1} \dots a_{2n}}} = \\ & = \sqrt[2n]{a_1 \dots a_{2n}} \Rightarrow V(2n) \end{aligned}$$

$V(n+1) \Rightarrow V(n)$: Mějme a_1, \dots, a_n .

Trik: Definujme:

$$b_1 := \frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1 \dots a_n}}$$

$$b_2 := \frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1 \dots a_n}}$$

$$b_n := \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1 \dots a_n}}$$

$$b_{n+1} := 1$$

$$V(n+1) \Rightarrow \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_{n+1}}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{b_1 b_2 \dots b_{n+1}} = 1$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{n+1} \geq n+1$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{\sqrt[n]{a_1 \dots a_n}} \geq n$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \Rightarrow V(n)$$

Q.E.D.

Množina reálných čísel

Definice:

Množina A je **induktivní**, jestliže:

- (i) $1 \in A$
- (ii) $k \in A \Rightarrow k + 1 \in A$

$\mathbb{N} \stackrel{\text{def}}{=} \text{průnik všech induktivních množin (nebo také } \{1, 2, 3, 4, \dots\} \text{)}$.

$\mathbb{Z} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N})$

$\mathbb{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$

\mathbb{R} za okamžik.

\mathbb{C} se zabývat nebudeme.

VĚTA 1 (o reálném tělese):

Existuje právě jedno uspořádané těleso \mathbb{R} , na němž jsou dány operace “+” a “.”, prvky “0” a “1” a binární relace “ \geq ” s následujícími vlastnostmi:

I. Algebraické vlastnosti tělesa:

- (i) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (asociativita) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$
- (ii) $x + y = y + x$ (komutativita) $\forall x, y \in \mathbb{R}$
- (iii) $x + 0 = 0 + x = x$ $\forall x \in \mathbb{R}$
- (iv) $x + (-x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R} : \exists -x \in \mathbb{R}$
- (v) $(xy)z = x(yz)$ $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$
- (vi) $xy = yx$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$
- (vii) $1x = x1 = x$ $\forall x \in \mathbb{R}$
- (viii) $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \exists x^{-1} \in \mathbb{R}$
- (ix) $x(y + z) = xy + xz$ $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

II. Axiomy uspořádání:

- (i) $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ (slabá antisymetrie) $\forall x, y \in \mathbb{R}$
- (ii) $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (tranzitivita) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$
- (iii) $x \leq y \vee y \leq z$ (dichotomie) $\forall x, y \in \mathbb{R}$
- (iv) $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$
- (v) $xy \geq 0$ $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \geq 0, y \geq 0$

Axiom o supremu

Nechť $M \in \mathbb{R}$. Řekneme, že M je:

- (i) **shora omezená**, jestliže $\exists K \in \mathbb{R}$ pro $\forall x \in M$ takové, že $x \leq K$.
- (ii) **zdola omezená**, jestliže $\exists K \in \mathbb{R}$ pro $\forall x \in M$ takové, že $x \geq K$.
- (iii) **omezená**, jestliže je omezená shora i zdola.

K pak nazýváme **horní (dolní) závorou množiny M** .

Supremum

Nechť M je neprázdná a shora omezená podmnožina \mathbb{R} . Pak $\exists! G \in \mathbb{R}$, pro které platí:

- (i) $\forall x \in M : x \leq G$ (horní závora)
 - (ii) $\forall G' < G \exists x \in M : G' \leq x$ (nejmenší horní závora)
- (pro uzavřený interval $G \in M$, pro otevřený interval však **nikoliv**.)

$$G = \sup M$$

Infimum

Nechť M je neprázdná a zdola omezená podmnožina \mathbb{R} . Pak $\exists! g \in \mathbb{R}$, pro které platí:

- (i) $\forall x \in M : x \geq g$ (dolní závora)
- (ii) $\forall g' > g \exists x \in M : g' \geq x$ (nejmenší dolní závora)

$$g = \inf M$$

DŮKAZ:

Definujme množinu $-M := \{-x, x \in M\}$. Pak $-M$ je shora omezená (neboť M je zdola omezená). Tedy $\exists G = \sup(-M)$ (supremum máme zavedeno axiomaticky).

$$G \geq -x \Rightarrow -G \leq x \Rightarrow g \leq x \quad \forall x \in M$$

Pak ovšem $g := -G = \inf(M)$.

Příklady:

$(0, 2)$	$\inf M = 0 \notin M$	$\sup M = 2 \notin M$
$[0, 2]$	$\inf M = 0 \in M$	$\sup M = 2 \in M$
$\{n \in \mathbb{N} : x = 2 - 1/n\}$	$\inf M = 1 \in M$	$\sup M = 2 \notin M$
$(0, 2) \cup \{3\}$	$\inf M = 0 \notin M$	$\sup M = 3 \in M$

VĚTA 2 (Archimédova vlastnost):

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : x < n$$

DŮKAZ:

Sporem: předpokládejme, že $\exists x \in \mathbb{R}$ takové, že pro $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq x$. Pak je \mathbb{N} shora omezená, tedy $\exists G = \sup \mathbb{N}$.

Přitom pro \mathbb{N} platí: $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 1 \in \mathbb{N}$ (jde o průnik všech induktivních množin). Tedy $n + 1 \leq G$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$, tudíž $n \leq G - 1$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$. Ovšem v tom případě $\sup \mathbb{N} = G - 1!$

‡ *Spor*

Spočetnost: Množina A je spočetná, existuje-li zobrazení $f: \mathbb{N} \xrightarrow{1-1} A$.

VĚTA 3 (hustota racionálních a iracionálních čísel v reálných číslech):

$\mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{Q}$: Kardinálně $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$, můžeme zobrazit všechna racionální čísla na \mathbb{N} (matice, řádky budou p a sloupce q , číslujeme diagonálně).

Pro každá $a, b \in \mathbb{R}, a < b \exists q \in \mathbb{Q}, r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ takové, že $a < q < b, a < r < b$ (ať uděláme sebeužší mezírku na reálné ose, vejde se nám tam nějaké racionální a iracionální číslo).

DŮKAZ:

Přímo:

(Q) $q = m/n, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$.Z Archimeda $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ takové, že $1/(b-a) < n$, tedy $b-a > 1/n$. Pak ale jistě existuje $m \in \mathbb{Z}$ tak, že $m/n \in (a, b)$. $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ Necht' $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}, a < q_1 < q_2 < b$.Zvolme $r = q_1 + 1/\sqrt{2}(q_2 - q_1)$. Pak:(i) $r \in (q_1, q_2) \subset (a, b)$, neboť $1/\sqrt{2} < 1$.(ii) $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (cvičení).**VĚTA 4 (o existenci n -té odmocniny):**

(Tato věta je těžká!)

$$\forall x > 0, x \in \mathbb{R} \wedge \forall n \in \mathbb{N} : \exists y > 0, y \in \mathbb{R}, \quad y^n = x$$

DŮKAZ:

Nejdříve si označme:

$$R_0^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$

$$R^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$$

Definujme si nějaké pomocné množiny:

$$M_1 := \{k > 0, k \in \mathbb{R} : k^n \leq x\}$$

$$M_2 := \{k > 0, k \in \mathbb{R} : k^n \geq x\}$$

LEMMA 1:

$$R^+ = M_1 \cup M_2$$

DŮKAZ:Zřejmě $M_1 \subseteq \mathbb{R}^+, M_2 \subseteq \mathbb{R}^+ \Rightarrow M_1 \cup M_2 \subseteq \mathbb{R}^+$.Kdyby $\mathbb{R}^+ \neq (M_1 \cup M_2)$, pak $\exists k, k \notin (M_1 \cup M_2)$, tedy $k^n \not\leq x$ ani $k^n \not\geq x$, což je ve sporu s dichotomií.✗ *Spor*Nyní si definujme $y_1 = \sup M_1, y_2 = \inf M_2$.**LEMMA 2:**

$$y_1^n \leq x \wedge x \leq y_2^n$$

DŮKAZ:Dokažme $y_1^n \leq x$ sporem: $y_1^n > x$.Pak by dle Archimeda $\exists h > 0, h > \frac{ny_1^n}{y_1^n - x}$ (trik). Tedy:

$$k \in M_1 \Rightarrow k^n \leq x \Rightarrow -x \leq -k^n$$

$$y_1^n - x \leq y_1^n - k^n$$

Z binomické věty:

$$y_1^n - k^n = (y_1 - k) \underbrace{(y_1^{n-1} + y_1^{n-2}k + \dots + y_1k^{n-2} + k^{n-1})}_{n \text{ členů, všechny } \leq y_1^{n-1}} \leq (y_1 - k)ny_1^{n-1}$$

Z (ii) vl. suprema $\exists k \in M_1 : k > y_1 - 1/h$, tedy:

$$(y_1 - k)ny_1^{n-1} < \frac{ny_1^{n-1}}{h} < ny_1^{n-1} \frac{y_1^n - x}{ny_1^{n-1}} = y_1^n - x$$

$$y_1^n - x < y_1^n - x$$

✗ *Spor*

Analogicky $x \leq y_2^n$.

Nyní konečně můžeme dokázat $y_1 = y_2$. Víme, že nejde, aby $y_2 < y_1$ (jinak $y_1^n > y_2^n$), tedy stačí vyloučit $y_1 < y_2$. Kdyby to ovšem platilo, dle V.3- by $\exists q \in \mathbb{Q}, q \in (y_1, y_2)$, což je však spor s $\mathbb{R}^+ = M_1 \cup M_2$.

Q.E.D.

Posloupnosti

Definice:

Je-li $\forall n \in \mathbb{N}$ přiřazeno $a_n \in \mathbb{R}$, pak množinu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme **posloupností reálných čísel**. a_n pak nazýváme n -tým členem posloupnosti.

Příklady:

- (i) $\{n\}_{n=1}^{\infty}$: 1, 2, 3, 4, 5, ...
- (ii) $\{2n + 1\}_{n=1}^{\infty}$: 3, 5, 7, 9, 11, ...
- (iii) $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$: 2, 4, 8, 16, 32, ...
- (iv) $\{p_n : p_n = n\text{-té prvočíslo}\}_{n=1}^{\infty}$: 2, 3, 5, 7, 11, ...
- (v) $\{1\}_{n=1}^{\infty}$: 1, 1, 1, 1, 1, ...
- (vi) $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$: -1, 1, -1, 1, -1, ...
- (vii) $a_1 = 1, a_{n+1} = 1 + a_n^2$: 1, 2, 5, 26, 677, ...

Definice:

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená, je-li omezená množina čísel $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.
Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je:

- **neklesající**, pokud $a_{n+1} \geq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$
- **nerostoucí**, pokud $a_{n+1} \leq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$
- (ostře) **rostoucí**, pokud $a_{n+1} > a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$
- (ostře) **klesající**, pokud $a_{n+1} < a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$
- **monotónní**, je-li neklesající, nerostoucí, rostoucí či klesající.
- **ryze monotónní**, je-li rostoucí či klesající.

Příklady:

- (i) $\{1/n\}$ je klesající.
- (ii) $\{\log n\}$ je rostoucí.
- (iii) $\{(-1)^n\}$ není monotónní.
- (iv) $\{5326\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající a nerostoucí.
- (v) $\{(1 + 1/n)^n\}$ je rostoucí (je třeba dokázat).

Vlastní limita posloupnosti

Definice:

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má vlastní limitu (je **konvergentní**) $A \in \mathbb{R}$, jestliže:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon$$

Značíme: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nemá vlastní limitu (je **divergentní**), jestliže:

$$\forall A \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n - A| > \varepsilon$$

Pozn.: Divergentní posloupností myslíme i posloupnost oscilující.

Příklady:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ není definovaná.
- (iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n = e$
- (v) $\lim_{n \rightarrow \infty} a = a$

DŮKAZ:

- (i) $A = 0$, dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme $n_0 > 1/\varepsilon$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : 1/n \leq 1/n_0 < \varepsilon$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$$

- (ii) $A = 1$, mějme $a_n = \sqrt[n]{n} = 1 + \delta_n$, kde $\delta_n > 0$ pro $\forall n \geq 2$.
Sporem: necht' $\lim \neq 1$:

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \sqrt[n]{n} \geq 1 + \varepsilon$$

Pak musí existovat rostoucí posloupnost $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, kde $n_k \in \mathbb{N}$ a $a_{n_k} > 1 + \varepsilon$. Tedy:

$$\sqrt[n_k]{n_k} > 1 + \varepsilon$$

$$1 + \delta_{n_k} > 1 + \varepsilon$$

$$n_k = (1 + \delta_{n_k})^{n_k} > (1 + \varepsilon)^{n_k} = 1 + n_k \varepsilon + \binom{n_k}{2} \varepsilon^2 + \dots$$

$$> n_k \varepsilon + \frac{n_k(n_k - 1)}{2} \varepsilon^2$$

$$\implies 1 > \varepsilon + \frac{n_k - 1}{2} \varepsilon^2 \quad \forall n_k$$

$$\implies \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon^2} \cdot 2 + 1 > n_k \quad \forall n_k$$

✘ Spor

(iii) $\exists \varepsilon$ takové, že pro $\forall n_0 \exists n : |a_n - A| \geq \varepsilon$ pro každé předem dané $A \in \mathbb{R}$.

Sporem: předpokládejme $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = A$, pak k $\varepsilon = 1/3$ existuje n_0 takové, že $|(-1)^n - A| < 1/3$ pro $\forall n > n_0$.

$$\begin{aligned} 2 &= |(-1)^n - (-1)^{n+1}| = |(-1)^n - A + A - (-1)^{n+1}| \leq \\ &\leq |(-1)^n - A| + |A - (-1)^{n+1}| < 1/3 + 1/3 = 2/3 \end{aligned}$$

✘ *Spor*

(iv) e si později nadefinujeme právě jako tuto limitu.

(v) Triviální.

VĚTA 1 (o jednoznačnosti limity posloupnosti):

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

DŮKAZ:

Nechť $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A_1 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A_2$, bez újmy na obecnosti (dichotomie) nechť $A_1 > A_2$. Zvolme $\varepsilon < (A_1 - A_2)/2$. Pak $\exists n_1, n_2$ taková, že:

$$\left. \begin{array}{l} \forall n \geq n_1 : |a_n - A_1| < \varepsilon \\ \forall n \geq n_2 : |a_n - A_2| < \varepsilon \end{array} \right\} \text{ pro } n \geq \max(n_1, n_2) \text{ platí zároveň obojí.}$$

✘ *Spor*

VĚTA 2 (o omezenosti konvergentní posloupnosti):

Každá konvergentní posloupnost je omezená.

DŮKAZ:

Zvol $\varepsilon = 1$. Nechť $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}$. Pak dle definice $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : |a_n - A| < \varepsilon \Rightarrow |a_n| < |A| + 1$$

Zvol $K := \max\{|A| + 1; |a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0}|\}$. Pak pro $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq K$.

Definice:

Řekneme, že posloupnost $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ je **vybraná** z $\{a_n\}$, existuje-li *rostoucí* posloupnost

$$\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$$

taková, že $b_k = a_{n_k}$ pro $\forall k \in \mathbb{N}$.

VĚTA 3 (o limitě vybrané posloupnosti):

Nechť $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ a $\{b_k\}$ je vybraná posloupnost z $\{a_n\}$. Pak $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = A$.

DŮKAZ:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : |a_n - A| < \varepsilon \quad \forall n > n_0 &\implies \exists k_0 \geq n_0 : a_{n_{k_0}} = b_{k_0} \\ \forall l \geq l_0 : |b_l - A| < \varepsilon & \text{ (neboť } b_l \text{ je také nějaké } a_n) \end{aligned}$$

Q.E.D.

VĚTA 4 (o aritmetice limit):

Nechť $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A \in \mathbb{R}$, $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} B \in \mathbb{R}$, pak platí:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = -A$
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B$
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/a_n) = 1/A$ (pokud $a_n \neq 0$ pro $\forall n$ a $A \neq 0$)
- (iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = AB$

Tedy také $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha a_n) = \alpha A$ a za dobrého počasí i $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = A/B$.

Pozor! Obecně neplatí $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n + d_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n + \lim_{n \rightarrow \infty} d_n$, nemusí jedna z nich existovat.

DŮKAZ:

- (i) Triviální, stačí volit $n'_0 = n_0$ (jako pro původní posloupnost).
- (ii) Pro dané $\varepsilon > 0$ platí limita $\{a_n\}$ od n_1 , $\{b_n\}$ od n_2 , tedy obě platí od $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$ dále. Tedy:

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < 2\varepsilon \quad \forall n \geq n_3$$

- (iii) Nejdříve dokážeme lemmu.

LEMMA:

$$\exists K > 0, \forall n : |a_n| \geq K$$

DŮKAZ:

Mějme $\varepsilon < |A|/2$:

$$\exists n_0, \forall n \geq n_0 : |a_n| \geq 2\varepsilon \Rightarrow K \geq 2\varepsilon$$

Pro $n \in \{1, \dots, n_0 - 1\} : K < \min\{|a_n|\} \Rightarrow \exists K$.

Q.E.D.

Zvolíme ε -pás kolem nuly o velikosti $K = \varepsilon_0$ takový, že $|a_n \geq \varepsilon_0|$, tedy $|1/a_n| \leq 1/\varepsilon_0$.

$$\left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{A} \right| = \left| \frac{A - a_n}{a_n A} \right| \leq \frac{\varepsilon}{|a_n A|} \leq \varepsilon \cdot \frac{1}{KA}$$

- (iv) Mějme $n \geq n_3 = \max\{n_1, n_2\}$:

$$\begin{aligned} |(a_n b_n) - (AB)| &= |a_n b_n - a_n B + a_n B - AB| \leq |a_n b_n - a_n B| + |a_n B - AB| = \\ &= |a_n| \underbrace{|b_n - B|}_{< \varepsilon} + |B| \underbrace{|a_n - A|}_{< \varepsilon} < |a_n| \varepsilon + |B| \varepsilon \end{aligned}$$

Přitom $|a_n|$ je omezeno nějakou konstantou K a $|B|$ je konstantní rovnou, tedy:

$$|a_n| \varepsilon + |B| \varepsilon \leq \underbrace{(K + |B|)}_{\text{konst.}} \varepsilon$$

Q.E.D.

VĚTA 5 (o uspořádání limit):

Mějme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$. Pak:

- (i) Pokud $A > B$, pak $\exists n_0$, od kterého $a_n > b_n$ pro $\forall \geq n_0$.
(ii) Pokud $\exists n_0$ takové, že $a_n \geq b_n$ pro $\forall \geq n_0$, pak $A \geq B$. (Pozor, neplatí $a_n > b_n \Rightarrow A > B$!
Např. $a_n = 1/n$, $b_n = -1/n$.)

DŮKAZ:

Zvol $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \frac{1}{4}(A-B)$, pak pro n_1 : $|a_n - A| < \varepsilon$, pro n_2 : $|b_n - B| < \varepsilon$, pro $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$ jsou tyto pásy již disjunktní:

$$a_n > A - \varepsilon > B + \varepsilon > b_n \quad \forall n \geq n_3$$

Q.E.D.

VĚTA 6 (o dvou policajtech):

Nechť:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A \in \mathbb{R}$$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : a_n \leq c_n \leq b_n$$

Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$.

DŮKAZ:

Zvolme $\varepsilon > 0$, pak:

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1 : |a_n - A| < \varepsilon$$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2 : |b_n - A| < \varepsilon$$

Definujme $n_3 := \max\{n_0, n_1, n_2\}$. Pak jistě

$$A - \varepsilon \leq a_n \quad \forall n > n_3$$

$$A - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < A + \varepsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$$

Q.E.D.

Příklad:

Nechť $a > 0$. Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

DŮKAZ:

($a > 1$) $\exists n_0 \in \mathbb{N}, n_0 \geq a, \forall n \geq n_0 : a \leq n$.
Tedy $1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}$ pro $\forall n \geq n_0$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

($a = 1$) Triviální.

($a < 1$) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1/a}}$
 $1/a > 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1/a} = 1$

(Jak bylo dokázáno.)

$$1 \neq 0 \wedge \sqrt[n]{1/n} \neq 0 \quad \forall n \xrightarrow{V.4} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} - 1/n = 1$$

Q.E.D.

VĚTA 7 (o součinu omezené a “nulové” posloupnosti):

Nechť $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ a $\{b_n\}$ je omezená. Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$.

Pozn.: Platí, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$. (Důkaz: (cvičení).)

DŮKAZ:

Víme, že pro $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $|b_n| \leq K$. Pak dle předpokladu a dvou policajťů:

$$\underbrace{0}_{\rightarrow 0} \leq \underbrace{|a_n b_n| = |a_n| |b_n|}_{\rightarrow 0} \leq \underbrace{K |a_n|}_{\rightarrow 0}$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n b_n| = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$$

Q.E.D.

Příklad: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin n = 0$

Nevlastní limita posloupnosti

Pokud posloupnost diverguje nade všechny meze (tedy neosciluje), říkáme, že nabývá nevlastní limity $\pm\infty$. Nejdříve si však musíme rozšířit dosud zavedené pojmy o nekonečna.

Rozšířená reálná osa

T-O-D-O: obrázek s úhly

Na nekonečna jsou možné dva pohledy. My se přidržíme toho, který zavádí nekonečna dvě.

Definujeme $\mathbb{R}^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. Nekonečna jsou pak zavedena takto:

- **Uspořádání:** $-\infty < a < +\infty$ $\forall a \in \mathbb{R}$
- **Sčítání:** $a + \infty = \infty$ $\forall a \in \mathbb{R}^* \setminus \{-\infty\}$
 $-\infty - a = -\infty$ $\forall a \in \mathbb{R}^* \setminus \{+\infty\}$
- **Násobení:** $a > 0 : a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$ $\forall a \in \mathbb{R}^*$
 $a < 0 : a \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$
- **Dělení:** $\frac{a}{\pm\infty} = 0$ $\forall a \in \mathbb{R}$
- **Absolutní hodnota:** $|\pm\infty| = +\infty$
- **Nedefinované výrazy:** $-\infty + \infty, 0 \cdot (\pm\infty), \frac{x}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Rozšířené supremum a infimum

Pokud množina M není shora omezená, $\sup M = +\infty$.

Pokud množina M není zdola omezená, $\inf M = -\infty$.

$$\sup \emptyset = -\infty$$

$$\inf \emptyset = +\infty$$

(Jediný případ, kdy $\inf > \sup$.)

Definice:

$\{a_n\}$ má nevlastní limitu $+\infty$, pokud:

$$\forall K > 0 \exists n_0, \forall n \geq n_0 : a_n \geq K$$

T-O-D-O: Zde může něco chybět...

VĚTA ():

Monotónní posloupnost má limitu. Pokud je omezená, má dokonce vlastní limitu.

DŮKAZ:

Pro neklesající posloupnost platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n\}$, podobně pro nerostoucí. Dále viz rozšířená definice suprema a infima.

Q.E.D.

Věty o limitách pro nevlastní limity

- *V.1- (o jednoznačnosti limity)* platí i pro nevlastní limity.
- *V.2- (omezená a konvergentní posloupnost)* nemá pro nevlastní limity smysl.
- *V.3- (limity vybrané posloupnosti)* platí i pro nevlastní limity.
- *V.4- (aritmetika limit)* platí i pro nevlastní limity, ovšem pouze, je-li výraz vpravo definován. (Tuto podmínku tedy přidáme navíc.)
- *V.5- (limity a uspořádání)* platí i pro nevlastní limity.

Limesy

Mějme $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Definujme posloupnosti $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\{c_k\}_{k \in \mathbb{N}}$:

$$b_k = \sup\{a_n : n \geq k, n \in \mathbb{N}\}$$

$$c_k = \inf\{a_n : n \geq k, n \in \mathbb{N}\}$$

Pozorování:

$$c_k \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ je nerostoucí} \Rightarrow \exists \lim_{k \rightarrow \infty} b_k$$

$$\{c_k\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ je neklesající} \Rightarrow \exists \lim_{k \rightarrow \infty} c_k$$

Limes superior

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} b_k & \lim b_k \in \mathbb{R} \\ +\infty & \{a_n\} \text{ je shora neomezená} \end{cases}$$

Limes inferior

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} c_k & \lim c_k \in \mathbb{R} \\ -\infty & \{a_n\} \text{ je zdola neomezená} \end{cases}$$

Příklad:

- (i) $a_n = (-1)^n$, $\liminf a_n = -1$, $\limsup a_n = 1$
- (ii) $a_n = 1/n^2$, $\liminf a_n = \limsup a_n = \lim a_n = 0$

Poznámky:

- (i) Narozdíl od limity, která nemusí existovat, $\liminf a_n$ a $\limsup a_n$ existují vždy.
- (ii) $\liminf a_n \leq \limsup a_n$

VĚTA 10 (o vztahu limity, suprema a limes inferior):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}^* \iff \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$$

DŮKAZ:

“ \Leftarrow ”

Víme: $\forall k \in \mathbb{N} : c_k \leq a_k \leq b_k$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = A \in \mathbb{R}^* \stackrel{2 \text{ policajti}}{\implies} \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = A$$

“ \Rightarrow ”(i) Nechť $A \in \mathbb{R}$:Zvol $\varepsilon > 0$. Potom $\exists n_0$ takové, že $\forall n \geq n_0$:

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

$$A - \varepsilon \leq a_n \leq A + \varepsilon$$

$$A - \varepsilon \leq c_n \leq a_n \leq b_n \leq A + \varepsilon$$

$$0 \leq b_n - c_n \leq 2\varepsilon \quad (\forall n \geq n_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - c_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$$

(ii) Nechť $A = +\infty$:Pak $\{a_n\}$ je shora neomezená.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

Zvolíme $K \in \mathbb{R}$. Pak $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0 : a_n > K$.

$$\inf_{n \geq n_0} \{a_n\} \geq K \Rightarrow c_{n_0} \geq K$$

Protože $\{c_k\}$ je neklesající, máme $\forall n \geq n_0 : c_n \geq K$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = +\infty$$

(iii) Nechť $A = -\infty$: analogicky.**Cvičení:**

Dokažte:

$$\liminf a_n + \liminf b_n \leq \liminf (a_n + b_n) \leq \limsup (a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$$

VĚTA (Bolzano—Weieistrassova věta):

Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.

DŮKAZ:

Nechť $\{a_n\}$ je omezená posloupnost. Pak definujeme

$$A = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Platí, že $A \in \mathbb{R}$, neboť $\{a_n\}$ je omezená, tedy

$$b_1 = \sup_{n \in \mathbb{N}}(a_n) \in \mathbb{R}$$

$$c_1 = \inf_{n \in \mathbb{N}}(a_n) \in \mathbb{R}$$

$$c_1 \leq c_n \leq b_n \leq b_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Definujeme množinu:

$$M_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{j \in \mathbb{N} : a_j \in [A - 1, A + 1]\} \neq \emptyset$$

$$m_1 \stackrel{\text{def}}{=} \min M_1$$

(index prvního bodu v pásku $A - 1, A + 1$).

Nechť jsou definována n_1, \dots, n_{k-1} . Pak definujeme:

$$M_k \stackrel{\text{def}}{=} \{j \in \mathbb{N}, j > n_{k-1} : a_j \in [A - 1/2^k, A + 1/2^k]\}$$

$$n_k \stackrel{\text{def}}{=} \min M_k$$

Takto definuji nekonečnou posloupnost indexů $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Tím získávám vybranou posloupnost

$$d_k = a_{n_k} \quad k \in \mathbb{N}$$

Tvrdím, že $\lim_{k \rightarrow \infty} d_k = A$. Zvolme $\varepsilon > 0$, pak $\exists k_0$ takové, že

$$1/2^k < \varepsilon \quad \forall k \geq k_0$$

Tedy $|d_k - A| < \varepsilon$ pro $k \geq k_0$, tedy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d_k = A$$

Q.E.D.

VĚTA (Bolzano—Cauchyova věta):

Posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu, právě když platí tzv. Bolzano—Cauchyova podmínka:

Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že:

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \quad \forall m, n \in \mathbb{N} \quad (m, n \geq n_0)$$

DŮKAZ:“ \Rightarrow ”Zvolíme $\varepsilon > 0$, pak $\exists n_0$ takové, že pro $\forall n \geq n_0$ platí:

$$|A - a_n| < \varepsilon/2$$

Tedy pro $\forall m, n \geq n_0$:

$$|a_m - a_n| = |a_m - A + A - a_n| \leq |a_m - A| + |a_n - A| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

“ \Leftarrow ”Zvolíme $\varepsilon > 0$, pak $\exists n_0$ takové, že pro $\forall n \geq n_0$ platí:

$$|a_m - a_n| < \varepsilon$$

Speciálně pro $m = n_0$:

$$a_{n_0} - \varepsilon < a_n < a_{n_0} + \varepsilon \quad (\forall n \geq n_0)$$

$$a_{n_0} - \varepsilon < \liminf a_n \leq \limsup a_n < a_{n_0} + \varepsilon \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \stackrel{\text{V.10}}{\Rightarrow} \exists \lim a_n = \limsup a_n \in \mathbb{R}$$

Q.E.D.

Číselné řady

Definice

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Mějme $m \in \mathbb{N}$, pak $s_m = a_1 + a_2 + \dots + a_m$ nazveme *m-tým částečným součtem* řady $\sum a_n$. **Součtem** nekonečné řady $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ nazýváme limitu posloupnosti $\{s_m\}_{m=1}^{\infty}$, pokud tato limita existuje. Limitu značíme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \begin{cases} A \in \mathbb{R} & \text{řada } \mathbf{konverguje} \\ \pm\infty & \text{řada } \mathbf{diverguje} \\ \text{neexistuje} & \text{diverguje či osciluje} \end{cases}$$

Příklady:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ neexistuje

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$
 $s_{2n+2} = 1 - \frac{1}{m} \Rightarrow \lim s_m = 1 \Rightarrow \sum a_n = 1$

(iii) $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

(iv) $\sum \frac{1}{\sqrt{n^4 + 3}}$ konverguje, součet nelze vyjádřit

(v) $\sum q^{n-1} = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots$

$$s_m = 1 + q + \dots + q^{n-1} = \begin{cases} \frac{q^n - 1}{q - 1} & q \neq 1 \\ m & q = 1 \end{cases}$$

$$\lim s_m = \begin{cases} \infty & q \geq 1 \\ \frac{1}{1-q} & |q| < 1 \\ \text{neexistuje} & q \leq -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum q^{n-1} \text{ konverguje} \Leftrightarrow |q| < 1$$

$$\lim q^{n-1} = \lim a_n = \begin{cases} +\infty & q > 1 \\ 1 & q = 1 \\ 0 & |q| < 1 \\ \text{neexistuje} & q \leq -1 \end{cases}$$

VĚTA 1 (nutná podmínka konvergence řady):

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Pozorování

Pro geometrickou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

(Implikace však neplatí pro všechny řady.)

DŮKAZ:

Nechť $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, pak $s \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1} = s$$

$$0 = s - s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \stackrel{\text{VOAL}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (s_{n+1} - s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Q.E.D.

Varování

Implikaci nelze obrátit (tedy podmínka není postačující).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \not\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje}$$

Příklad:

Harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$:

$$s_m = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}$$

$$s_{2m} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{2m}$$

$$s_{2m} - s_m = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{2m}$$

$$\geq \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} + \cdots + \frac{1}{2m}$$

$$= m \frac{1}{2m} = \frac{1}{2}$$

$$s_{2m} - s_m \geq \frac{1}{2} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Tedy neplatí Bolzano-Cauchyova podmínka:

$$\stackrel{\text{V2.12-}}{\geq} \lim_{n \rightarrow \infty} s_m = +\infty$$

Řady s nezápornými členy

Studujeme $\sum a_n$, kde $a_n \geq 0$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

Pozorování

Pro řady s nezápornými členy mohou nastat pouze dvě možnosti. $\sum a_n \in \mathbb{R}$ nebo $\sum a_n = +\infty$. To plyne z toho, že posloupnost $\{s_m\}_{m=1}^{\infty}$ je neklesající, a tedy dle V2.9- $\exists \lim s_m = \sum a_n$.

VĚTA 2 (linearita konvergentních řad):

Nechť $\sum a_n$ a $\sum b_n$ konvergují. Pak:

- (i) $\sum (a_n + b_n)$ konverguje.
- (ii) $\sum c_n$ konverguje $\iff \sum \alpha c_n$ konverguje pro $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \emptyset$.

Důkaz: (cvičení)

VĚTA 3 (srovnávací kritérium):

Nechť $\sum a_n$ a $\sum b_n$ jsou řady s nezápornými členy. Nechť dále existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $\forall n \geq n_0$ platí $a_n \leq b_n$. Pak:

- (i) $\sum b_n$ konverguje $\Rightarrow \sum a_n$ konverguje.
- (ii) $\sum a_n$ diverguje $\Rightarrow \sum b_n$ diverguje.

Obě tvrzení říkají v podstatě totéž. (a_n je “hodnější” řada, b_n “zlobivější”.)

DŮKAZ:

- (i) $s_n = a_1 + \dots + a_n$, $\sigma_m = b_1 + \dots + b_m$

Dále definujme $\sigma := \lim \sigma_m \in \mathbb{R}$.

Navíc víme, že $\{s_n\}$ je posloupnost neklesající.

$$s_n = a_1 + \dots + a_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_n$$

$$\leq a_1 + \dots + a_{n_0} + \sigma_n \quad (\forall n \geq n_0)$$

$$\leq a_1 + \dots + a_{n_0} + \sigma \quad (\in \mathbb{R})$$

Tedy je $\{s_n\}$ neklesající shora omezená posloupnost, tudíž $\sum a_n$ je dle V2.9- konvergentní.

- (ii) \iff (i)

Q.E.D.

VĚTA 4 (limitní srovnávací kritérium):

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy. Nechť dále existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = A \in \mathbb{R}^*$. Pak:

- (i) $A \in (0, \infty) \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje
- (ii) $A = 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje
- (iii) $A = \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje

DŮKAZ:

(i) Víme, že $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $\forall n \geq n_0$ platí:

$$\frac{1}{2}A \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 2A \quad (\text{jen šikovné epsilon})$$

$$\frac{A}{2}b_n \leq a_n \leq 2Ab_n$$

$$\text{“}\Rightarrow\text{”}: \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \stackrel{\text{V.3-}}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{2}b_n \text{ konverguje} \stackrel{\text{V.2-}}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje}$$

$$\text{“}\Leftarrow\text{”}: \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje} \stackrel{\text{V.2-}}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} 2Ab_n \text{ konverguje} \stackrel{\text{V.3-}}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje}$$

(ii) Zvol $\varepsilon = 1$, pak $\exists n_0$ takové, že $a_n/b_n < 1$ pro $\forall n \geq n_0$, tedy $a_n < b_n$, V.3-.

(iii) Zvol $\varepsilon = 1$, pak $\exists n_0$ takové, že $a_n/b_n > 1$ pro $\forall n \geq n_0$, tedy $a_n > b_n$, V.3-.

Q.E.D.

Příklady:

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 1}{\sqrt{3 + n + 2n^8}} \stackrel{?}{\approx} \frac{n^3}{n^4} = \frac{1}{n}$$

$$a_n = \frac{n^3 + 1}{\sqrt{3 + n + 2n^8}}, \text{ zvol } b_n = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + n}{\sqrt{3 + n + 2n^8}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \in (0, \infty)$$

Tedy dle (i) $\sum a_n$ konverguje $\Leftrightarrow \sum b_n$ konverguje. My ale víme, že $\sum b_n = \sum \frac{1}{n} = +\infty$ diverguje.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \quad (\text{diverguje})$$

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{15}}{3^n} a_n = \frac{n^{15}}{3^n}, \text{ zvol } b_n = 1/2^n$$

Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{15}}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} = 0$$

indukcí, Bernoulli, ... ((cvičení))

Navíc víme, že:

$$\sum b_n \text{ konverguje (geometrická řada)} \stackrel{(ii)}{\Rightarrow} \sum a_n \text{ konverguje}$$

VĚTA 5 (Cauchyovo odmocninové kritérium):

Nechť $\sum a_n$ je řada s nezápornými členy:

- (i) Nechť $\exists q \in (0, 1)$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$: $\sqrt[n]{a_n} \leq q$. Pak $\sum a_n$ konverguje.
- (ii) Nechť $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$. Pak $\sum a_n$ konverguje.
- (iii) Nechť $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$. Pak $\sum a_n$ konverguje.
- (iv) Nechť $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$. Pak $\sum a_n$ diverguje.
- (v) Nechť $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$. Pak $\sum a_n$ diverguje.

DŮKAZ:

- (i) Položme $b_n = q^n$, pak $a_n \leq b_n$ pro $n \geq n_0$. Dále $\sum b_n$ konverguje (geometrická řada, $q < 1$) $\stackrel{V.3-}{\Rightarrow}$ také $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
- (ii) Označ $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = A < 1$. Zvol $\varepsilon > 0$, $A + \varepsilon < 1$.

$$\exists n_0, \forall n \geq n_0 : \sup\{\sqrt[k]{a_k}, k \geq n\} \leq A + \varepsilon$$

Tedy $\sqrt[n]{a_n} \leq A + \varepsilon$, $n \geq n_0$.

Označ $q \stackrel{\text{def}}{=} A + \varepsilon < 1$, tvrzení plyne z V.-1.

(iii) Plyne z V.-2: $\exists \lim \Rightarrow \lim = \limsup$.

(iv)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$$

$$\Rightarrow \exists \text{ vybraná posloupnost } \{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}, \sqrt[n_k]{a_{n_k}} > 1$$

$$\Rightarrow a_{n_k} > 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \text{neplatí nutná podmínka } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Rightarrow \sum \{a_n\}$$

Jiný pohled na poslední krok

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq \sum_{n=1}^{\infty} a_{n_k} \text{ (neboť } a_n \geq 0) \geq \sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty$$

(v) Ihned plyne z V.-4.

Q.E.D.

VĚTA 6 (d'Alembertovo podílové kritérium):

Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy:

- (i) $\exists q \in (0, 1), \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0: \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \Rightarrow \sum a_n$ konverguje .
- (ii) Nechť $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Pak $\sum a_n$ konverguje.
- (iii) Nechť $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Pak $\sum a_n$ konverguje.
- (iv) Nechť $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. Pak $\sum a_n$ diverguje.

DŮKAZ:

(i)

$$\begin{aligned}
 a_{n_0+1} &\leq qa_{n_0} \\
 a_{n_0+2} &\leq qa_{n_0+1} \leq qa_{n_0} \\
 a_{n_0+k} &\leq q^k a_{n_0} \\
 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n &\leq \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n + a_{n_0} \sum_{n=1}^{\infty} q^k}_{\text{konverguje}} \\
 &\stackrel{V.3-}{\Rightarrow} \sum a_n \text{ konverguje}
 \end{aligned}$$

(ii) (i) \Rightarrow (ii) ((cvičení))(iii) (ii) \Rightarrow (iii) ((cvičení))

(iv)

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 &\Rightarrow \exists n_0, \forall n \Rightarrow n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \\
 &\Rightarrow \{a_n\} \text{ je rostoucí od jistého indexu} \\
 &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \stackrel{V.1-}{\Rightarrow} \sum a_n \text{ diverguje}
 \end{aligned}$$

*Q.E.D.***Poznámka o nebezpečích**(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1 \Rightarrow$ nevíme nic.(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \Rightarrow$ nevíme nic.**Příklad:**

$\sum \frac{1}{n}$ diverguje, $\sum \frac{1}{n^2}$ konverguje, obě mají limitu 1.

(iii) Parametr $q < 1$ je důležitý!**Příklad:**

$$\begin{aligned}
 \sqrt[n]{a_n} < 1 &\not\Rightarrow \sum a_n \text{ konverguje} & \forall n \geq n_0 \\
 \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 &\not\Rightarrow \sum a_n \text{ konverguje} & \forall n \geq n_0
 \end{aligned}$$

(iv) Jestliže $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, řada divergovat nemusí.

Příklad:

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$ konverguje. Po zpřeházení také, ale limes superior už neseďí.

Příklad:

Vyšetřete, pro která $a \geq 0$ konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n^n}{n!}$.

Pozorování

- (i) $a = 0$: $\sum a_n$ konverguje.
- (ii) a moc velké: $\sum a_n$ diverguje.
- (iii) $a = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty \Rightarrow \sum a_n$ konverguje.

Dle d'Alemberta:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a^{n+1}(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{a^n n^n} = a \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = a \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = ae$$

$$\Rightarrow a \in (0, 1/e) \Rightarrow \sum a_n \text{ konverguje}$$

$$\Rightarrow a \in (1/e, \infty) \Rightarrow \sum a_n \text{ diverguje}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{e} \Rightarrow \text{nevíme nic}$$

Zbývající vyšetření

$$a = \frac{1}{e} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!} \right)$$

Diverguje, neboť

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!} \right) \neq 0$$

⟨cvičení⟩

VĚTA 7 (Cauchyovo kondenzační kritérium):

Nechť $\sum a_n$ je řada s nezápornými členy a necht' $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $\forall n \geq n_0$ platí $a_{n+1} \leq a_n$. Pak:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ konverguje}$$

DŮKAZ:“ \Leftarrow ”: Přímá:Nechť $\sum 2^n a_{2^n}$ konverguje. Označ:

$$s_n = a_1 + \dots + a_n$$

$$t_k = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^k a_{2^k}$$

Víme: $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k < \infty$ Potom k danému $n \exists k: n < 2^k$.

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n \\ &\leq a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + \dots + a_7) + \dots + (a_{2^k} + \dots + a_{2^{k+1}-1}) \\ &\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^k a_{2^k} = t_k \\ \Rightarrow \forall n: s_n &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} t_k \Rightarrow s_n \text{ je omezená} \Rightarrow \sum a_n \text{ konverguje} \end{aligned}$$

“ \Rightarrow ”: Nepřímá:Nechť $\sum 2^n a_{2^n}$ diverguje.Víme: $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = +\infty$ Potom k danému $n \exists k: n > 2^k$.

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n \\ &= a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + \dots + a_7) + \dots + (a_{2^{k-1}+1} + \dots + a_{2^k}) \\ &\geq \frac{a_1}{2} + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \dots + 2^{k-1} a_{2^k} = \frac{1}{2} t_k \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = +\infty \\ \Rightarrow \sum a_n &\text{ diverguje} \end{aligned}$$

*Q.E.D.***Příklad:**Pro která $\alpha \in \mathbb{R}$ konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$?

Z původních kritérií nevyplývá nic, neboť $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^\alpha}} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} = 1$. Navíc víme, že řada konverguje pro $\alpha > 1$ a diverguje pro $\alpha \leq 1$. Pro $\alpha \leq 0$ diverguje také. Pro $\alpha > 0$ je $\frac{1}{n^\alpha}$ klesající, tedy lze užít V.7-.

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ konverguje} &\stackrel{\text{V.7-}}{\Leftrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} \right) \text{ konverguje} \\ &\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}} \right)^n \text{ konverguje} \\ &\Leftrightarrow \alpha > 1 \text{ (geometrická řada)} \end{aligned}$$

Závěr

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ konverguje} \Leftrightarrow \alpha > 1$$

Příklad:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^{\alpha} n} \text{ konverguje} \Leftrightarrow \alpha > 1$$

DŮKAZ:

$$\begin{aligned} \sum \text{ konverguje} &\Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \left(2^n \frac{1}{2^n \log^{\alpha} 2^n} \right) \text{ konverguje} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\log^{\alpha} 2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ konverguje} \Leftrightarrow \alpha > 1 \end{aligned}$$

VĚTA 8 (Raabeovo kritérium):

Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ konverguje}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ diverguje}$$

Příklad:

$$\sum a_n, \quad a_n = \left(\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots 3n} \right)^2$$

⟨cvičení⟩

Absolutní konvergence

Definice

Řekneme, že řada $\sum a_n$ **konverguje absolutně**, jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje.

Poznámky:

- (i) $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel $\Rightarrow \{|a_n|\}$ je posloupnost nezáporných čísel.
- (ii) $\sum a_n$ konverguje absolutně $\Rightarrow \sum a_n$ konverguje. (Neplatí obráceně!)

Příklad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \log 2$$

konverguje, ale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

T-O-D-O: Tady toho dost chybí.

T-O-D-O: Neabsolutní konvergence. Zde toho dost chybí.

Funkce

Základní definice

- (i) Funkcí jedné reálné proměnné rozumíme zobrazení $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$.
- (ii) Říkáme, že f je na M
- (1) rostoucí: $\forall x, y \in M : x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
 - (2) klesající: $\forall x, y \in M : x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$
 - (3) nerostoucí, neklesající (analogicky)
- (iii) Říkáme, že f je na M
- (1) sudá:
 - I. $x \in M \Rightarrow -x \in M$
 - II. $f(x) = f(-x) \quad \forall x \in M$
 - (2) lichá:
 - I. $x \in M \Rightarrow -x \in M$
 - II. $f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in M$
 - (3) periodická (s periodou $p > 0$):
 - I. $x \in M \Rightarrow x \pm p \in M$
 - II. $f(x + p) = f(x - p) = f(x) \quad \forall x \in M$

Okolí

$a \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$:

- (i) $\mathcal{P}(a, \delta)$ — prstencové (redukované) okolí bodu: $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$
- (ii) $\mathcal{U}(a, \delta)$: $(a - \delta, a + \delta) = \mathcal{P}(a, \delta) \cup a$
- (iii) $\mathcal{P}^+(a, \delta)$: $(a, a + \delta)$
- (iv) $\mathcal{P}^-(a, \delta)$: $(a - \delta, a)$
- (v) $\mathcal{U}^+(a, \delta)$: $[a, a + \delta)$
- (vi) $\mathcal{U}^-(a, \delta)$: $(a - \delta, a]$

$$\mathcal{P}(+\infty, \delta) = (1/\delta, +\infty) = \mathcal{U}(+\infty, \delta)$$

$$\mathcal{P}(-\infty, \delta) = (-\infty, -1/\delta) = \mathcal{U}(-\infty, \delta)$$

Limita funkce

Nechť $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě $a \in \mathbb{R}^*$ **limitu** $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{P}(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(A, \varepsilon)$$

Značíme: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$

Poznámky:

- (i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, pak je funkce definována na nějakém prstencovém okolí bodu a . V bodě a funkce f může a nemusí být definována. Je-li f definována v a , pak $f(a)$ nemá vliv na limitu $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ neexistuje, existuje nevlastní ($A = \pm\infty$) nebo existuje vlastní ($A \in \mathbb{R}$).
- (iii) Limitu počítáme buď ve vlastním bodě ($a \in \mathbb{R}$) nebo v nevlastním bodě ($a = \pm\infty$).

Jiné (ekvivalentní) formulace:

$a \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall x \in (a - \delta, a + \delta) - \{a\} \Rightarrow f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$$

$a \in \mathbb{R}$, $A = +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \iff \forall K \in \mathbb{R} \exists \delta > 0, \forall x \in (a - \delta, a + \delta) - \{a\} \Rightarrow f(x) > K$$

Obecně: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: f(\mathcal{P}(a, \delta)) \subset \mathcal{U}(A, \varepsilon)$

Definice:

Nechť $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v a limitu zprava (zleva) rovnou $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{P}^+(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(A, \varepsilon)$$

(Zleva \mathcal{P}^- .)

Značíme $\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = A$.

Pozorování:

$a \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^*$:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \iff \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A$$

Důkaz: (cvičení)

Příklady:

(i)

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [0, \infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 25} f(x) = 5$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \in [0, \infty) - \{25\} \\ \pi^2/8 & x = 25 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 25} f(x) = 5$$

Důkaz z definice: Dáno $\varepsilon > 0$, chci $\delta > 0$ tak, aby

$$x \in (25 - \delta, 25 + \delta) - \{25\} \Rightarrow \sqrt{x} \in (5 - \varepsilon, 5 + \varepsilon)$$

δ volím tak, aby $\sqrt{25 + \delta} < 5 + \varepsilon \wedge \sqrt{25 - \delta} > 5 - \varepsilon$

$$\Rightarrow \delta \stackrel{\text{volím}}{=} \min\{(5 + \varepsilon)^2 - 25, 25 - (5 - \varepsilon)^2\}$$

(ii) $f(x) = c, x \in \mathbb{R}$:

Pak $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ pro $\forall a \in \mathbb{R}$. Dáno $\varepsilon \Rightarrow \delta$ libovolné.

(iii) $f(x) = \text{sign } x$:

$$\text{sign } x = \begin{cases} -1 & x \in (-\infty, 0) \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x \in (0, \infty) \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ neexistuje (neboť $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$).

(iv) Dirichletova funkce $D(x) = \text{bool}(x \in \mathbb{Q})$:

Nemá ani jednostrannou limitu v žádném bodě $x \in \mathbb{R}$.

(v) Riemannova funkce:

$$R(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ 1/q & x \in \mathbb{Q}, x = p/q \end{cases}$$

(viz D1).

$$\lim_{x \rightarrow a} R(x) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

(Pro každé ε si najdu oblast, kde z něj nic nevyskočí, a to bude δ .)

Spojitosť

Nechť $f: M \rightarrow \mathbb{R}, M \subset \mathbb{R}$. Funkce f je spojitá v $a \in \mathbb{R}$, jestliže

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Příklad:

$R(x)$ je spojitá v $\forall x \notin \mathbb{Q}$.

VĚTA 1 (Heineova věta):

Nechť $f: M \rightarrow \mathbb{R}, M \subset \mathbb{R}$. Nechť f je definována na nějakém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}^*$ ($\mathcal{P}(a, \delta_0)$). Potom jsou následující dvě tvrzení ekvivalentní:

- (i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$
- (ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňující pro $\forall n \in \mathbb{N} x_n \in D(f)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ a $x_n \neq a$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$. (Viz D2)

DŮKAZ:**(i) \Rightarrow (ii)****Víme:** $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: f(\mathcal{P}(a, \delta)) \subset \mathcal{U}(A, \varepsilon)$ Nechť $\{x_n\}$ splňuje požadavky (ii), tj.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a,$$

$$x_n \neq a \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

Tedy k $\varepsilon > 0$:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : x_n \in \mathcal{U}(a, \delta)$$

(neboť $\lim x_n = a$). Ale

$$x_n \neq a \quad \forall n \Rightarrow \exists n_0, \forall n \geq n_0 : x_n \in \mathcal{P}(a, \delta)$$

Tedy

$$f(x_n) \in \mathcal{U}(A, \varepsilon) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$$

(ii) \Rightarrow (i)**Sporem:** Předpokládáme, že neplatí (i), ale platí (ii).

Neplatí (i), tedy:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq A \iff \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0 \exists x \in \mathcal{P}(a, \delta) : f(x) \notin \mathcal{U}(A, \varepsilon)$$

Nechť je dáno $n \in \mathbb{N}$. Zkonstruujeme x_n tak, že $x_n \in \mathcal{P}(a, 1/n) \cap \mathcal{P}(a, \delta_0)$ a $f(x_n) \notin \mathcal{U}(A, \varepsilon)$. Toto lze udělat, stačí položit $\delta = 1/n$. To provedu pro $\forall n \in \mathbb{N}$.Nyní máme tedy posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Zřejmě platí:

$$x_n \in D(f) \quad (x_n \in \mathcal{P}(a, \delta_0), \forall n \in \mathbb{N})$$

$$x_n \neq a \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad (x_n \in \mathcal{P}(a, 1/n), \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0)$$

Ale $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq A$, protože jsme si řekli $f(x_n) \notin \mathcal{U}(A, \varepsilon)$.
 \nexists Spor**VĚTA 2 (o jednoznačnosti limity funkce):**Funkce f má v každém bodě nanejvýše jednu limitu.**DŮKAZ:**Nechť $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \wedge \lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$.Nechť $\{x_n\}$ splňuje $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

$$\xrightarrow{\text{Heine}} \lim f(x_n) = A, \lim f(x_n) = B \Rightarrow A = B \xrightarrow{\text{V.2-}} \text{tvrzení věty.}$$

Q.E.D.

VĚTA 3 (o lokální omezenosti funkce s vlastní limitou):

Nechť f má v $a \in \mathbb{R}$ vlastní limitu. Potom existuje $\delta > 0$ taková, že f je na $\mathcal{P}(a, \delta)$ omezená.

DŮKAZ:

Víme: Pro $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ takové, že $f(\mathcal{P}(a, \delta)) \leq \mathcal{U}(a, \varepsilon)$.

Limita je vlastní, $A \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{U}(A, \varepsilon) : (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$.

Zvol $\varepsilon = 1$. Pak existuje $\delta > 0$ taková, že:

$$f(\mathcal{P}(a, \delta)) \leq \mathcal{U}(A, 1)$$

$$f(x) \in (A - 1, A + 1) \quad \forall x \in \mathcal{P}(A, \delta)$$

$$\Rightarrow f \text{ je omezená na } \mathcal{P}(a, \delta)$$

Q.E.D.

Poznámka:**VĚTA 4 (o aritmetice limit funkcí):**

Nechť $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, $a \in \mathbb{R}^*$. Pak:

- (i) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B$, je-li výraz vpravo definován.
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = AB$, je-li výraz vpravo definován.
- (iii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = A/B$, je-li výraz vpravo definován.

DŮKAZ:

(i)

Zvol posloupnost $\{x_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $x_n \neq a$. Potom dle Heine 1:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = B$$

$$\stackrel{\text{VOAL}}{\implies} \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x_n) + g(x_n)) = A + B$$

a protože je posloupnost libovolná,

$$\stackrel{\text{Heine 2}}{\implies} \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = A + B$$

(ii), (iii) analogicky.

Q.E.D.

VĚTA 5 (o uspořádání a funkčních policajtech):

- (i) Necht' $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > \lim_{x \rightarrow a} g(x)$, $a \in \mathbb{R}^*$. Pak existuje prstencové okolí $\mathcal{P}(a, \delta)$ takové, že pro $\forall x \in \mathcal{P}(a, \delta)$ platí $f(x) > g(x)$.
- (ii) Necht' pro $\forall x \in \mathcal{P}(a, \delta)$ platí $f(x) \leq g(x)$ a necht' existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Potom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.
- (iii) Necht' pro $\forall x \in \mathcal{P}(a, \delta)$ platí $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ a necht' $\lim f(x) = \lim g(x)$. Potom existuje $\lim h(x)$ a $\lim f(x) = \lim h(x) = \lim g(x)$. ("Policajti.")

DŮKAZ:

- (i) Necht' $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, $A > B$. Zvolím $\varepsilon > 0$ tak, aby $\mathcal{U}(A, \varepsilon) \cap \mathcal{U}(B, \varepsilon) = \emptyset$ (futrály se nepotkají). K tomuto ε existuje δ taková, že:

$$\begin{aligned} f(\mathcal{P}(a, \delta)) &\subseteq \mathcal{U}(A, \varepsilon), \quad g(\mathcal{P}(a, \delta)) \subseteq \mathcal{U}(B, \varepsilon) \\ \Rightarrow f(x) &> g(x) \quad \forall x \in \mathcal{P}(a, \delta) \end{aligned}$$

- (ii) Skoro totéž.
- (iii) Zvolím $\varepsilon > 0$, pak existuje $\delta_0 > 0$ taková, že:

$$\begin{aligned} f(\mathcal{P}(a, \delta_0)) &\subseteq \mathcal{U}(A, \varepsilon), \quad g(\mathcal{P}(a, \delta_0)) \subseteq \mathcal{U}(A, \varepsilon) \\ \Rightarrow \gamma = \min(\delta, \delta_0) &: h(\mathcal{P}(A, \gamma)) \subseteq \mathcal{U}(A, \varepsilon) \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} h(x) &= A \end{aligned}$$

Q.E.D.

Poznámka:

Všechny věty v této části platí i pro jednostranné limity. Např. Heine:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a_+} f(x) &\iff \begin{cases} x_n \in \mathcal{P}(f) \\ x_n \in \mathcal{P}^+(a, \delta) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \end{cases} \quad \text{pro nějaké } \delta > 0 \\ &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A \end{aligned}$$

Příklady:

- (i) $\lim_{x \rightarrow 0} xD(x) = 0$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x)$ neexistuje (Heine).
Stačí zvolit posloupnost $\{x_n\}$, $x_n \rightarrow \text{inf}$, $\lim f(x_n) = \lim \sin(x_n)$. Volíme $x_n = n\pi/2$. $x_n = \{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots\}$. Limita neexistuje.
- (iii) $\lim_{x \rightarrow 0_+} \sin(1/x)$
Zvolím $x_n = 2/(\pi n)$, použijeme Heineho větu.

Spojité funkce

$a \in \mathbb{R}$, f je **spojitá** v a , právě když:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(\mathcal{U}(a, \delta)) \subseteq \mathcal{U}(f(a), \varepsilon)$$

f je **spojitá zprava** v a , právě když výše uvedené platí pro $x \rightarrow a_+$ a $f(\mathcal{U}^+(a, \delta))$.

f je **spojitá zleva** v a , právě když výše uvedené platí pro $x \rightarrow a_-$ a $f(\mathcal{U}^-(a, \delta))$.

Důsledek VOALF:

Nechť f a g jsou spojité v bodě $a \in \mathbb{R}$. Pak $f \pm g$ a $f \cdot g$ jsou také spojité v $a \in \mathbb{R}$. A jestliže navíc $g(a) \neq 0$, pak také podíl f/g je spojitý v bodě $a \in \mathbb{R}$.

Příklad:

Neboť $\lim_{x \rightarrow a} x = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$, je každá funkce tvaru

$$\mathcal{P}(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + ax + a_0 \quad (a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R})$$

spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R}$. Takovou funkci nazýváme **polynom**.

Složená funkce

$\sin(x^2)$ je funkce složená. Podobné jako skládání zobrazení:

$$x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f(g(x)) \iff (f \circ g)$$

$(f \circ g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(g(x))$ — **složená funkce**. f nazýváme **vnější funkce**, g **vnitřní funkce**. Např.:

$$g(x) = x^2, \quad f(y) = \sin(y) \Rightarrow (f \circ g)(x) = \sin(x^2)$$

Varování: Skládání zobrazení není komutativní! $(g \circ f)(y) = (\sin y)^2$

Nechť:

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$$

$$\lim_{x \rightarrow A} f(y) = B \quad (\text{Pozor na } x \rightarrow A!)$$

Platí pak, že $\lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) = B$? Neplatí!

Příklad:

$$g(x) \equiv 0$$

$$f(x) \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$(f \circ g)(x) \equiv 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f \circ g)(x) = 1$$

Ale:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 0$$

(blíží se k 0, ale nikdy tam nedorazí).

‡ *Spor*

Co děláme špatně?

(i) Vnitřní funkce je konstantní.

(ii) Vnější funkce je nespojitá v tomto bodě.

VĚTA 6 (o limitě složené funkce):

Nechť $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$ (vnitřní funkce), $\lim_{y \rightarrow A} f(y) = B$ (vnější funkce); $a, A, B \in \mathbb{R}^*$.
Nechť navíc platí jeden z předpokladů:

(P1) f je spojitá v bodě A .

(P2) $\exists \delta > 0$ taková, že $g(x) \neq A$ pro $\forall x \in \mathcal{P}(a, \delta)$ (tedy se vnitřní funkce “vyhýbá” své limitě).

Potom platí: $\lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) = B$.

DŮKAZ:

Poznámka:

Proč věta nelze dokázat bez předpokladů? Lžidůkaz:

Ke zvolenému $\varepsilon > 0$ najdu $\psi > 0$ takové, že:

$$f(\mathcal{P}(A, \psi)) \subseteq \mathcal{U}(B, \varepsilon)$$

K $\psi > 0 \exists \mu > 0$ takové, že:

$$g(\mathcal{P}(a, \mu)) \subseteq \mathcal{U}(A, \psi)$$

$$\stackrel{?}{\Rightarrow} (f \circ g)(\mathcal{P}(a, \mu)) \subseteq f(\mathcal{U}(A, \psi))$$

Chci tak $\subseteq \mathcal{U}(B, \varepsilon)$, to ale nejde! Místo $f(\mathcal{U}(A, \psi))$ bychom v tom případě museli použít $f(\mathcal{P}(A, \psi))$.

Možné cesty z nouze:

(i) Už od začátku si vezmu $\mathcal{U}(A, \psi)$ — požaduji spojitost.

(ii) Nebo vnitřní funkci zakážu, aby nabývala své limity — dostanu $\mathcal{P}(A, \psi)$.

Tedy:

(P1) Zvol $\varepsilon > 0$:

$$\exists \psi > 0 : f(\mathcal{U}(A, \psi)) \subseteq \mathcal{U}(B, \varepsilon)$$

$(\mathcal{U}(A, \psi)$ místo \mathcal{P} si mohu dovolit, neboť je f v bodě A spojitá, tj. $f(A) = B$.)

$$\exists \mu : g(\mathcal{P}(a, \mu)) \subseteq \mathcal{U}(A, \psi)$$

$$(f \circ g)(\mathcal{P}(a, \mu)) = f(g(\mathcal{P}(a, \mu))) \subseteq f(\mathcal{U}(A, \psi)) \subseteq \mathcal{U}(B, \varepsilon)$$

(P2) Zvol $\varepsilon > 0$:

$$\exists \psi > 0 : f(\mathcal{P}(A, \psi)) \subseteq \mathcal{U}(B, \varepsilon)$$

Neboť $g(x) \neq A$ pro $x \in \mathcal{P}(a, \delta)$ a k ψ :

$$\exists \mu : g(\mathcal{P}(a, \mu)) \subseteq \mathcal{U}(A, \psi)$$

$$\gamma = \min(\delta, \mu) : g(\mathcal{P}(a, \gamma)) \subseteq \mathcal{P}(A, \psi)$$

$$f(g(\mathcal{P}(a, \mu))) \subseteq f(\mathcal{P}(A, \psi)) \subseteq \mathcal{U}(B, \varepsilon)$$

Q.E.D.

Intervaly

Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Pak **otevřeným intervalem** (a, b) nazýváme množinu všech $\{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$. **Uzavřený interval** $[a, b]$ je definován pro $a \leq b$ jako množina $\{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$.

VĚTA 7 (o limitě monotónní funkce):

Nechť funkce je monotónní na otevřeném intervalu (a, b) , kde $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Potom existují $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow b-} f(x)$.

DŮKAZ:

T-O-D-O: diagram

Nechť f je např. neklesající. Zvolíme $\varepsilon > 0$ a definujeme množinu $M = f((a, b)) = \{f(x), x \in (a, b)\}$. Potom definujeme $A := \inf M$. Z (ii) vlastnosti infima:

$$\exists x_0, x_0 \in (a, b) : A \leq f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in (a, x_0)$$

Tedy:

$$f(x) \in \mathcal{U}(A, \varepsilon)$$

Tudíž $f((a, x_0)) \subseteq \mathcal{U}(A, \varepsilon)$ a stačí zvolit $\delta > 0$, aby $\mathcal{P}^+(a, \delta) \subseteq (a, x_0)$. Tedy

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = A$$

Analogicky další případy.

Q.E.D.

Spojité funkce na intervalu

Definice:

Je-li (a, b) interval, pak a nazýváme **počátečním bodem** intervalu, b pak **koncovým bodem** a $x \in (a, b)$ **vnitřními body** intervalu. Obdobně pro uzavřené a polouzavřené intervaly.

Definice:

Řekneme, že funkce f je **spojitá na intervalu** I , jestliže je spojitá zprava ve všech bodech intervalu kromě koncového a zároveň spojitá zleva ve všech bodech intervalu kromě počátečního.

VĚTA 8 (Darbouxova):

Nechť f je spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ a $f(a) < f(b)$. Pak

$$\forall y \in (f(a), f(b)) \exists x \in (a, b) : f(x) = y$$

(Neboli spojitá funkce nabývá na intervalu všech mezihodnot.)

DŮKAZ:

T-O-D-O: diagram

Definujeme množinu $M := \{x \in [a, b] : f(x) < y\}$. Je neprázdná ($a \in M$) a omezená ($M \subseteq [a, b]$).

Označ $x_0 = \sup M$. Tvrdíme, že $f(x_0) = y$. To nyní dokážeme sporem s vlastnostmi suprema. Předpokládejme:

$$f(x_0) < y \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : f(x_0) \notin \mathcal{U}(y, \varepsilon) \Rightarrow y \notin \mathcal{U}(f(x_0), \varepsilon)$$

Funkce je spojitá, tedy k $\varepsilon \exists \delta > 0$ taková, že

$$f(x) \notin \mathcal{U}(y, \varepsilon) \quad \forall x \in \mathcal{U}(x_0, \delta) \cap [a, b]$$

($f(x_0)$ je “strašně” daleko od y a nevejde se do ε -okolí y) **T-O-D-O:** Diagram

Čili x_0 není supremem množiny M , neboť existují body $x > x_0$, což je spor s první vlastností suprema!

Nechť $f(x_0) > y$. To je ve sporu s druhou vlastností suprema. $\exists \varepsilon > 0$ takové, že $y \notin \mathcal{U}(f(x_0), \varepsilon)$. K ε potom $\exists \delta > 0$ taková, že

$$\forall x \in \mathcal{U}(x_0, \varepsilon) : f(x) > y \Rightarrow \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) : f(x) > y$$

Pak ale x_0 nemůže být supremum, protože je před ním “díra” $x_0 - \delta$.

‡ *Spor*

VĚTA 9 (zobrazení intervalu spojitou funkcí):

(Nebo také “o spojitém obrazu intervalu”.)

Nechť I je interval a nechť $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá. Pak $f(I)$ je interval. (Pozor, obrazem otevřeného intervalu je uzavřený interval.)

DŮKAZ:

LEMMA:

Nechť $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ a nechť platí

$$\forall x, y \in M, \forall z \in \mathbb{R} : x < z < y \Rightarrow z \in M$$

Pak M je interval.

DŮKAZ:

Definujme $a := \inf M$, $b := \sup M$, $a \leq b$ (množina M je neprázdná) a tedy $(a, b) \subseteq M \subseteq [a, b]$. Tedy M je interval.

Q.E.D.

Nechť $y_1, y_2 \in f(I)$:

$$\exists x_1, x_2 \in I : f(x_1) = y_1 \wedge f(x_2) = y_2$$

Bez újmy na obecnosti předpokládejme $y_1 < y_2$. Nechť $y_3 \in (y_1, y_2)$. Dle V.8- pak

$$\exists x_3 \in [x_1, x_2] : f(x_3) = y_3$$

Tedy má $f(I)$ vlastnosti množiny M z lemmatu, takže je dle lemmatu $f(I)$ interval.
Q.E.D.

Definice:

Máme-li $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$, řekneme, že f nabývá v bodě $a \in M$:

- (i) **maxima na M** , jestliže $\forall x \in M, f(x) \leq f(a)$
- (ii) **minima na M** , jestliže $\forall x \in M, f(x) \geq f(a)$
- (iii) **ostrého maxima na M** , jestliže $\forall x \in M \setminus \{a\}, f(x) < f(a)$
- (iv) **ostrého minima na M** , jestliže $\forall x \in M \setminus \{a\}, f(x) > f(a)$
- (v–viii) **lokálních**, jestliže existuje $\delta > 0$ tak, že f nabývá na množině $M \cap \mathcal{U}(a, \delta)$ maxima (minima)

T-O-D-O: 1S je nějaké divné...

VĚTA 1S (Heineova věta pro spojitost):

Nechť f je definovaná na okolí bodu $a \in \mathbb{R}$. Pak f je spojitá v bodě a , právě když pro každou posloupnost $\{x_n\} \in D(f)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$.

Cvičení:

Rozmyslete si, proč v této větě musí být navíc předpoklad $x_n \neq a$.

Známe: f spojitá v $a \Leftrightarrow [x_n \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(a)]$.

Otázka: Kdy nabývá funkce svého maxima či minima?

$$A = \{f(x), x \in D(f)\}, \exists \sup A$$

Příklady:

- (i) $f(x) = x$ na $(0, 1)$. **T-O-D-O:** graf
- (ii) f na $[0, 1]$ nemá maximum. Je spojitá na $[a, b]$? **T-O-D-O:** graf

VĚTA 10 (vztah spojitosti a extrémů):

Nechť f je spojitá na $[a, b]$. Pak f nabývá na $[a, b]$ svého minima i maxima.

DŮKAZ:

$$A = \{f(x), x \in [a, b]\}, M = \sup A$$

Z vlastností suprema: \exists posloupnost $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = M$. Pak $\{x_n\} \subset [a, b]$, tedy $\{x_n\}$ je omezená.

Tudíž dle Bolzano-Weistrasse \exists posloupnost $\{x_{n_k}\}$,

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c \in [a, b]$$

f je spojitá v c , tudíž

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(c)$$

Ale přitom $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = M$, neboli

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = M$$

Podle věty o jednoznačnosti limity: $M = f(c)$, tedy f nabývá svého maxima M v bodě c .
Minimum obdobně.

Q.E.D.

VĚTA 11 (vztah spojitosti a omezenosti):

Spojitá funkce na $[a, b]$ je omezená.

DŮKAZ:

Dle V.10- f nabývá min, max. Označme $m = \min f$, $M = \max f$. Pak $m \leq f(x) \leq M$ pro $\forall x \in [a, b] \Rightarrow f$ je omezená.

Q.E.D.

Pozn.: Předpoklady jsou podstatné!

Prostá funkce

Definice:

Řekneme, že f je **prostá (injektivní)** funkce, jestliže $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ pro $\forall x, y \in D(f)$.

Příklady:

- (i) \sin není prostý na \mathbb{R} , ale je na $[-\pi/2, \pi/2]$.
- (ii) Konstantní funkce nebývá prostá.

Inverzní funkce

Definice:

Nechť f je prostá funkce na $M \subset \mathbb{R}$, kdy $f: M \mapsto f(M)$. Pak **inverzní** funkce k f (označíme f^{-1}) je definována na $f(M)$ pro $\forall y \in f(M)$ jako:

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$$

Příklady:

- (i) $f(x) = x^2$ na $[0, \infty)$
- (ii) $f(y) = \sqrt{y}$ na $[0, \infty)$

VĚTA 12 (o inverzní funkci):

Nechť I je interval v \mathbb{R} , f je definovaná, spojitá a rostoucí (či klesající) na I . Pak f^{-1} je definovaná, spojitá a rostoucí či klesající na $f(I)$.

DŮKAZ:**Definovanost a monotonie**

Nechť f je například rostoucí, pak f^{-1} je definovaná a rostoucí na $f(I)$.

$$\begin{aligned} y_i &= f(x_i) \\ x_i &= f^{-1}(y_i) \end{aligned}$$

$$y_1 < y_2 \iff f(x_1) < f(x_2) \xrightarrow{f \uparrow} x_1 < x_2 \iff f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$$

Spojitost

Zvolíme $y_0 \in f(I)$, $y_0 = f(x_0)$, $x_0 = f^{-1}(y_0)$, $\varepsilon > 0$. Nechť y_0 je vnitřním bodem $f(I)$, pak x_0 je vnitřním bodem I .

$$\exists x_1, x_2, x_1 < x_0 < x_2 \Rightarrow (x_1, x_2) \subset \mathcal{U}(x_0, \varepsilon)$$

Zvol $\delta > 0$ tak, aby $\mathcal{U}(y, \delta) \subseteq (f(x_1), f(x_2))$. Tedy pro $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tak, že:

$$f^{-1}(\mathcal{U}(y_0, \delta)) \subseteq f^{-1}(f(x_1), f(x_2)) = (x_1, x_2) \subseteq \mathcal{U}(x_0, \varepsilon) = \mathcal{U}(f^{-1}(y_0), \varepsilon)$$

Tedy f^{-1} je spojitá v y_0 . Obdobně pro krajní body ((cvičení)).

Q.E.D.

Zavedení elementární funkce

Chceme definovat transcendentní funkce, zejména:

- exp, log, a^x
- goniometrické funkce (sin, cos, tg, cotg)
- cyklometrické funkce (arcsin, arccos, arctg, arccotg)
- hyperbolické funkce (sinh, cosh, tgh, cotgh)

VĚTA 13 (zavedení exponenciální funkce):

$\exists!$ reálná funkce “exp” splňující axiomy:

- (i) $\exp(x + y) = \exp x \cdot \exp y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
 (ii) $\exp x \geq 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

DŮKAZ:

(A) Jednoznačnost (předpokládáme, že existuje):

- (1) $\exp(mx) = (\exp x)^m \quad \forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$: Triviálně indukci z (i).
 (2) $\exp(0) = 1$:

$$\exp(0) = \exp(0 + 0) \stackrel{(i)}{=} \exp(0)^2 \Rightarrow \exp(0) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{ nikdy — (ii)}$$

- (3) $\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$:

$$1 = \exp(0) = \exp(x - x) = \exp(x) \cdot \exp(-x)$$

- (4) $\exp x \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$: Ihned plyne z (3).
 (5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp x = +\infty$: Ihned plyne z (ii) — dolní policajt ($1 + x$).
 (6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = 0$: Kombinace (3) a (5).
 (7) $\exp x > 1 \quad \forall x > 0$: Ihned z (ii).
 (8) $\exp \nearrow$ na \mathbb{R} :

$$x < y \Rightarrow 1 \stackrel{(7)}{<} \exp(y - x) = \frac{\exp y}{\exp x} \Rightarrow \exp y > \exp x$$

- (9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1$ (!)

$$\frac{1}{\exp x} \stackrel{(3)}{=} \exp(-x) \stackrel{(ii)}{\geq} 1 - x$$

To znamená:

$$\begin{aligned} 1 + x &\stackrel{(ii)}{\leq} \exp x \leq \frac{1}{1 - x} \\ \Rightarrow x &\leq \exp x - 1 \leq \frac{1}{1 - x} - 1 = \frac{x}{1 - x} \\ \Rightarrow \underbrace{1}_{\rightarrow 1} &\leq \underbrace{\frac{\exp x - 1}{x}}_{\rightarrow 1} \leq \underbrace{\frac{1}{1 - x}}_{\rightarrow 1} \end{aligned}$$

- (10) \exp je spojitá na \mathbb{R} :
Pro $\forall a \in \mathbb{R}$ musí platit:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (\exp x - \exp a) &= \lim_{x \rightarrow a} \exp a \cdot \left(\frac{\exp x}{\exp a} - 1 \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \underbrace{\exp a}_{\rightarrow \exp a} \underbrace{\left(\frac{\exp(x-a) - 1}{x-a} \right)}_{\substack{(9) \\ \rightarrow 1}} \underbrace{(x-a)}_{\rightarrow 0} \stackrel{\text{VOAL}}{=} 0 \end{aligned}$$

- (11) $\exp x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (!!)

Takto při definici limitou také dokážeme jednoznačnost — limity jsou jednoznačné.

$$\exp\left(-\frac{x}{n}\right) \stackrel{(ii)}{\geq} 1 - \frac{x}{n}$$

To znamená:

$$\forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} : \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \exp x \leq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}$$

$$\forall x > 0 : \underbrace{1}_{\rightarrow 1} \leq \frac{\exp x}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} \leq \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^{-n}}_{\rightarrow 1} \stackrel{\text{Bernoulli}}{\leq} \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^{-1}}_{\rightarrow 1}$$

(pro dost velká n)

- (B) Existence:

Dokazujeme existenci $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$.

1. krok

$\left\{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right\}$ je rostoucí pro $x > 0$.

Použijeme AG-nerovnost ve tvaru

$$\sqrt[n+1]{a_1 \dots a_{n+1}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1}}{n+1}$$

pro $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1 + \frac{x}{n}$, $a_{n+1} = 1$:

$$\sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} \stackrel{\text{AG}}{\leq} \frac{\left(1 + \frac{x}{n}\right)n + 1}{n+1} = 1 + \frac{x}{n+1}$$

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$$

Tedy je posloupnost $\left\{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right\}$ rostoucí.

2. krok

Posloupnost $\left\{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right\}$ je omezená.

Víme, že je monotónní, tedy stačí dokázat, že nějaká podposloupnost je omezená.

Tvrzení: $\{a_n\}$ monotónní a $\{a_{n_k}\}$ omezená $\Rightarrow \{a_n\}$ omezená. Důkaz: (cvičení).

Dokážeme, že

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \exists k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : \left(1 + \frac{x}{nk}\right)^{nk} \leq \left(1 - \frac{x}{k}\right)^k$$

Potřebuji k tak velké, aby $\frac{x}{k+x} < 2$, tj. aby platil Bernoulli.

$$\left(1 + \frac{x}{nk}\right)^{-n} = \left(\frac{nk+x}{nk}\right)^{-n} = \left(\frac{nk}{nk+x}\right)^n = \left(x - \frac{x}{nk+x}\right)^n$$

$$\stackrel{\text{Bernoulli}}{\geq} 1 - \frac{nx}{nk+x} \geq 1 - \frac{x}{k}, \text{ umocnit na } k$$

Poslední nerovnost platí, neboť $nkx \leq nkx + x^2$.

Q.E.D.

Poznámky:

- (i) $\exp(0) = 1$
- (ii) $\exp(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$
- (iii) \exp je rostoucí, $\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty) \Rightarrow \exp$ má inverzní funkci na $(0, \infty)$. Tuto funkci nazveme přirozeným logaritmem, značíme “log”.
- (iv) $a > 0$, def. $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$

VĚTA 14 (základní vlastnosti logaritmu):

Funkce \log , definovaná předpisem

$$\log = \exp^{-1}$$

má následující vlastnosti:

- (i) $D(\log) = (0, \infty)$, $\log: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$
- (ii) $\log(xy) = \log x + \log y \quad \forall x, y \in (0, \infty)$, $\log(x^n) = n \log x$
- (iii) \log je spojitý, rostoucí na $(0, \infty)$, $\log 1 = 0$, $\log e = 1$, $\log 1/x = -\log x$
- (iv) Základní limity:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(x+1)}{x} = 1$$

DŮKAZ:

Plyne z odpovídajících vlastností funkce \exp . (cvičení)
Q.E.D.

Obecná mocnina

$a > 0$ (!), $b \in \mathbb{R}$, pak definuji

$$a^b \stackrel{\text{def}}{=} \exp(b \log a)$$

Speciálně, definuji funkci $a^x \stackrel{\text{def}}{=} \exp(x \log a)$. Pro $a = e$: $e^x = \exp x$.

Poznámka:

$$x^2 = e^{2 \log x} = e^{\log x + \log x} = e^{\log x} \cdot e^{\log x} = x \cdot x = x^2$$

Sinus**Co od něj chceme?**

- definovaná na \mathbb{R}
- spojitá
- 2π -periodická
- omezená
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- součtové vzorce
- pevné body:

$$\sin(0) = 0, \quad \sin(\pi/2) = 1, \quad \sin(\pi) = 0$$

$$\sin(0) = 1, \quad \sin(\pi/2) = 0, \quad \sin(\pi) = -1$$

Středoškolská definice

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

Ale v čem měřím α ? Ve stupních vznikne něco “rozňácaného”, ale s radiány se dostáváme do kruhu, neboť nemáme definovanou obloukovou vzdálenost. Tu bych musel matematicky definovat zase přes sin.

VĚTA 15 (goniometrické funkce):

$\exists!$ reálná funkce s a $\exists!$ reálná funkce c takové, že:

(i)

$$s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y)$$

$$c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y)$$

(ii) s lichá, c sudá (na \mathbb{R})(iii) $s > 0$ na $(0, 1)$, $s(1) = 0$ **DŮKAZ:**

Nechť takové funkce existují. Pak:

(1) $s(0) = 0$ (z lichosti)
 $c(0) = 1$:

$$c(x+(-x)) = c(x)c(-x) - s(x)s(-x) \stackrel{\text{sudost}}{=} c^2(x) + s^2(x)$$

$$c(0) = c(0+0) = c^2(0) + s^2(0) = c^2(0) \Rightarrow c(0) = 1$$

T-O-D-O: Ale to platí i pro $c(0) = 0 \dots$?!

(2) $c^2(x) + s^2(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Plyne z předchozího — ekvivalentní k $c(x+(-x)) = c(0) = 1$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} : s(2x) &= 2s(x)c(x) \\ \text{(3)} \quad c(2x) &= c^2(x) - s^2(x) \end{aligned}$$

Ihned plyne z (i).

$$\text{(4)} \quad s(1/2) = 1, \quad c(1/2) = 0$$

$$0 \stackrel{\text{(iii)}}{=} s(1) \stackrel{\text{(3)}}{=} 2 \underbrace{s(1/2)}_{>0 \text{ (iii)}} c(1/2) \Rightarrow c(1/2) = 0$$

$$\stackrel{\text{(2)}}{\Rightarrow} s(1/2) = 1$$

$$\text{(5)} \quad c(1) = -1$$

$$c(1) = c(2 \cdot 1/2) \stackrel{\text{(3)}}{=} c^2(1/2) - s^2(1/2) = 0 - 1$$

$$\text{(6)} \quad s(x+1) = -s(x) \text{ (antiperiodicita):}$$

$$s(x+1) = s(x) \underbrace{c(1)}_{-1} + c(x) \underbrace{s(1)}_0 = -s(x)$$

$$s(x+2) = s(x) \text{ (periodicita):}$$

$$\begin{aligned} s(x+2) &= s(x)c(2 \cdot 1) + c(x)s(2 \cdot 1) \\ &= s(x) \underbrace{(c^2(1) - s^2(1))}_1 + c(x) \underbrace{(2s(1)c(1))}_0 \\ &= s(x) \end{aligned}$$

$$\text{(7)} \quad s(1/2 - x) = c(x)$$

$$s(1/2 - x) = \underbrace{s(1/2)}_1 c(x) - \underbrace{c(1/2)}_0 s(x) = c(x)$$

$$\text{(8)} \quad c > 0 \text{ na } (0, 1/2) \text{ — z (7) a (iii)}$$

$$\text{(9)} \quad s \text{ je rostoucí na } (0, 1/2), \quad c \text{ je klesající na } (0, 1/2).$$

Volíme x, y tak, aby $0 < x - y < x < 1/2$ (tedy také $0 < y < x$),

$$\begin{aligned} s(x-y) &= s(x) \underbrace{c(y)}_{\leq 1} - \underbrace{c(x)s(y)}_{>0 \text{ (8), (iii)}} \\ &\leq s(x) \end{aligned}$$

(10-)

$$\begin{aligned} c(1/2^n) &= \sqrt{\frac{1 + c1/2^{n-1}}{2}} \\ s(1/2^n) &= \sqrt{\frac{1 - c1/2^{n-1}}{2}} \end{aligned}$$

⟨cvičení⟩

(10) s, c spojitě v bodě 0.

V bodech $k2^{-n}$ definujeme funkce s, c dle (10-). V ostatních bodech ($x \neq k2^{-n}$) pak limitně supremem:

$$x \neq k2^{-n} : s(x) = \sup\{s(y), y = k2^{-n}, y < x\}, \quad x \in (0, 1/2)$$

Stačí definovat na $(0, 1/2)$, na zbytku nedefinujeme z periodicity a antiperiodicity.

$a_n := c(1/2^n)$, pak $a_{n+1} = \sqrt{\frac{1+a_n}{2}}$. Podle (9) je a_n rostoucí a omezená $\Rightarrow \lim a_n = A$, $A = \sqrt{\frac{1+A}{2}} \Rightarrow A = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} s(x) = 0 \Rightarrow c$ je spojitě.

$$(11) \quad s(a) - s(b) = 2s\left(\frac{a-b}{2}\right)c\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

(cvičení): Z (i).

(12) s, c spojité na \mathbb{R} :

$$\lim_{x \rightarrow a} (s(x) - s(a)) \stackrel{(ii)}{=} 2 \lim_{x \rightarrow a} \underbrace{s\left(\frac{x-a}{2}\right)}_{\rightarrow 0} \underbrace{c\left(\frac{x+a}{2}\right)}_{\leq 1}$$

(13) Existuje vlastní $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{s(x)}{x} = \pi$. (**Důležité!**)

$$t(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{s(x)}{c(x)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1/2 + k\}$$

Potom t je lichá, rostoucí na $(-1/2, 1/2)$ a

$$t(x+y) = \frac{t(x) + t(y)}{1 - t(x)t(y)}$$

$$t(1/4) = 1$$

$$x, y \in (0, 1/4) : \begin{aligned} t(x+y) &\geq t(x) + t(y) \\ s(x+y) &\leq s(x) + s(y) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow t(x) \geq s(x)$$

$$\Rightarrow \forall k, m, n \in \mathbb{N}, k2^{-n} \in (0, 1/4) :$$

$$t(k2^{-n}) \geq kt(2^{-n}) \geq ks(2^{-n}) \geq \frac{k}{m}s(2^{-n}m)$$

$$\Rightarrow \frac{t(k2^{-n})}{k2^{-n}} \geq \frac{s(2^{-n}m)}{m2^{-n}}$$

$$\Rightarrow \frac{t(y)}{y} \geq \frac{s(y)}{y} \quad \forall x, y \in (0, 1/2)$$

Definujeme $\pi := \inf_{y \in (0, 1/2)} \frac{t(y)}{y}$.

$$\underbrace{\pi}_{\rightarrow \pi} \geq \underbrace{\frac{s(x)}{x} = \frac{t(x)}{x} c(x)}_{\rightarrow \pi(\text{police})} \geq \underbrace{\pi c(x)}_{\rightarrow \pi 1}$$

Q.E.D.

Definujeme:

$$\sin(x) = s\left(\frac{x}{\pi}\right)$$

$$\cos(x) = c\left(\frac{x}{\pi}\right)$$

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\operatorname{cotg}(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Pak bude platit:

- (i) \sin, \cos jsou 2π -periodické, π -antiperiodické a spojité na \mathbb{R}
- (ii) \sin je rostoucí na $(-\pi/2, \pi/2)$
- (iii) \cos je klesající na $(0, \pi)$

(iv) Základní limity:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \sin x)} = 1/2$$

Poznámky:

(i) Alternativní způsob:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

$$E(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Buď můžeme dokázat pomocí odhadů, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!},$$

nebo dokázat, že:

$$E(x + y) = E(x) \cdot E(y) \quad (\text{součin řad})$$

$$E(x) \geq 1 + x \quad (\text{pro } x > 0 \text{ triviální})$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

(ii) Základní limity:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$a > 0: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{e^{x \log a} - 1}{x \log a}}_{\rightarrow 1} \log a = \log a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + \cos x}}_{\rightarrow 1/2} = 1/2$$

Tedy v nule se $e^x - 1$ a $\sin x$ chovají v okolí nuly stejně jako lineární, $1 - \cos x$ jako kvadratické.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} x = 0$$

Cyklometrické funkce

arcsin

\sin je prostý pro $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Definuji $\arcsin x$ pro $x \in [-1, 1]$ předpisem

$$\arcsin x = y \iff y \in [-\pi/2, \pi/2] \wedge \sin y = x$$

(Graf je \sin otočený o 90° doprava. Funkce je rostoucí a spojitá.)

Cvičení:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 \text{ (pomocí věty o limitě inverzní funkce)}$$

arccos

Obdobně $\arccos x$ pro $x \in [-1, 1]$ předpisem

$$\arccos x = y \iff y \in [0, \pi] \wedge \cos y = x$$

(Graf je \arcsin posunutý o $\pi/2$ nahoru a vzhůru nohama ;-). Funkce je klesající a spojitá.)

Cvičení:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}} = ? \text{ (pro fajšmekry)}$$

arctg, arccotg

$\operatorname{tg} x$: zúžíme definiční obor na $(-\pi/2, \pi/2)$. Pak můžeme definovat arctg jako inverzní k $\operatorname{tg} x$ na $(-\pi/2, \pi/2)$. (Graf je tg naležato. Funkce je spojitá, rostoucí, omezená a na \mathbb{R} .)

$$\operatorname{arctg} x = y \iff y \in (-\pi/2, \pi/2) \wedge \operatorname{tg} y = x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

$$\operatorname{arccotg} x = y \iff y \in (0, \pi) \wedge \operatorname{cotg} y = x$$

(Graf je arctg posunutý o $\pi/2$ nahoru a vzhůru nohama ;-).)

Derivace reálné funkce

Definice:

Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$. Pak **derivací funkce f v bodě a** rozumíme

$$f'(a) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

(pokud existuje).

Derivací zprava a zleva rozumíme

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Poznámky:

(i)

$$f'(a) \begin{cases} \text{existuje} \\ \text{neexistuje} \end{cases} \begin{cases} \text{vlastní} \\ \text{nevlastní} \end{cases} \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$$

(ii) $f'(a)$ existuje \iff existuje $f'_+(a)$, $f'_-(a) \wedge f'_+(a) = f'_-(a)$

(iii) $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ (cvičení)

Příklady:

(i) $f(x) \equiv a$

$$f'(b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a - a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

(ii) $f(x) = x^n$

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^n - a^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^n + nha^{n-1} + \binom{n}{2}h^2a^{n-2} + \dots + h^n - a^n}{h} \\ &= na^{n-1} + \lim_{h \rightarrow 0} \left(\binom{n}{2}ha^{n-2} + \dots + h^{n-1} \right) = na^{n-1} \end{aligned}$$

(iii) $f(x) = e^x$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{a+h} - e^a}{h} = e^a \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}}_1 = e^a$$

(iv) $f(x) = \sin x$

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin a \cdot \cos h + \cos a \cdot \sin h - \sin a}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sin a \cdot \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\rightarrow 0} + \cos a \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\rightarrow 1} = \cos a \end{aligned}$$

(v) $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(a) = -\sin a$ (cvičení)

(vi) $f(x) = |x|$

$$f'(a) = \begin{cases} 1 & a > 0 \\ -1 & a < 0 \end{cases}$$

$f'_+(0) = 1, f'_-(0) = -1 \Rightarrow f'(0)$ neexistuje.

(vii) $f(x) = \operatorname{sign} x$

$$f'(a) = 0, a \neq 0$$

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sign}(0+h) - \operatorname{sign} 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} = +\infty$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sign}(0+h) - \operatorname{sign} 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-1}{h} = +\infty$$

$$\operatorname{sign}'(0) = +\infty$$

VĚTA 16 (vztah derivace a spojitosti):

Má-li funkce f v bodě a vlastní derivaci, pak je f spojitá v bodě a .

DŮKAZ:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{f'(a) \in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{(x - a)}_{\rightarrow 0} = 0$$

Q.E.D.

VĚTA 17 (aritmetika derivací):

Nechť existují $f'(a), g'(a)$.

- (i) $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$, je-li pravá strana definovaná.
- (ii) Je-li g spojitá v a , pak $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$, je-li pravá strana definovaná.
- (iii) Je-li g spojitá v a , $g(a) \neq 0$, pak

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{g(a)^2}.$$

DŮKAZ:

(i)

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + g(a+h) - (f(a) + g(a))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = f'(a) + g'(a) \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a+h) + f(a)g(a+h) - f(a)g(a)}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{g(a+h)}_{\substack{\rightarrow g(a) \\ \text{(spojitost!)}}} \underbrace{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}_{\rightarrow f'(a)} + f(a) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \\
&= g(a)f'(a) + f(a)g'(a)
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
&\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(a+h)}{g(a+h)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)g(a) - f(a)g(a+h)}{g(a+h)g(a)h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)g(a) - f(a)g(a) + f(a)g(a) - f(a)g(a+h)}{g(a+h)g(a)h} \\
&= \frac{g(a)f'(a) - g'(a)f(a)}{g(a)^2}
\end{aligned}$$

(Opět jsme použili spojitost, tedy $\lim_{h \rightarrow 0} g(a+h) = g(a)$.)**VĚTA 18 (o derivaci složené funkce):**

Nechť f má derivaci v bodě y_0 , g v bodě x_0 , g je spojitá v x_0 a $y_0 = g(x_0)$. Potom $(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$, je-li výraz na pravé straně definován (tedy se nejedná o $0 \cdot \infty$).

DŮKAZ:**Idea:**

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)
\end{aligned}$$

Ale co když $g(x) - g(x_0) = 0$?

- (i) Nechť $f'(y_0) \in \mathbb{R}$:
Definujeme funkci

$$F(y) := \begin{cases} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} & \text{pokud } y \neq y_0 \\ f'(y_0) & \text{pokud } y = y_0 \end{cases}$$

 F definujeme na nějakém okolí bodu y_0 . Potom je F spojitá v bodě y_0 .Víme, že f je definována na nějakém okolí y_0 a g na nějakém okolí x_0 . Tvrdím tedy, že

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(g(x)) = f'(y_0),$$

neboť

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0) \wedge \lim_{y \rightarrow g(x_0)} F(y) = F(g(x_0))$$

(to vyhovuje předpokladu 2 věty o spojitosti složené funkce).

$$(f \circ g)'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} F(g(x)) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(y_0)g'(x_0)$$

(dle VOAL, neboť výraz vpravo je definován).

(ii) Nechť $f'(y_0) = \pm\infty$:

Protože $f'(y_0)g'(x_0)$ je definován (dle předpokladu) a $f'(y_0) = \pm\infty$, pak jistě $g'(x_0) \neq 0$.

Tedy $\exists \mathcal{P}(x_0, \delta)$ takové, že $\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \neq 0$, tedy $g(x) \neq g(x_0)$. Tudíž

$$(f \circ g)'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Q.E.D.

Příklad:

$$(i) (a^x)' = (e^{x \log a})' = e^{x \log a} \cdot \log a = a^x \log a \quad (a > 0)$$

$$(ii) (x^x)' = (e^{x \log x})' = e^{x \log x} \cdot (x \log x)' = x^x \cdot (1 \log x + x \frac{1}{x}) = x^x (\log x + 1) \quad (x > 0)$$

VĚTA 19 (o derivaci inverzní funkce):

Nechť f je spojitá a ryze monotónní na intervalu I , a buď vnitřní bod I . Označíme $b = f(a)$.

(i) Je-li $f'(a) \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

(ii) Je-li $f'(a) = 0$ (např. v nule pro x^3) a f je rostoucí (klesající):

$$(f^{-1})'(b) = +\infty \quad (-\infty)$$

DŮKAZ:

Idea:

$$f^{-1}(y) = x, \quad y = f(x)$$

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}$$

Víme: f^{-1} je definovaná, spojitá a ryze monotónní na $f(I)$, b je vnitřním bodem intervalu $f(I)$, $a = f^{-1}(b)$.

$$(i) (f^{-1})'(b) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b}$$

Definujme funkci

$$F(y) := \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{pokud } x \neq a \\ f'(a) & \text{pokud } x = a \end{cases}$$

Tak $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = f'(a)$ a zároveň je F spojitá v a (bude zastupovat vnější funkci).

Dále $\lim_{y \rightarrow b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b)$ (vnitřní funkce), neboť f^{-1} je spojitá na $f(I)$. Tedy dle věty o spojitosti složené funkce:

$$\lim_{y \rightarrow b} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a} = f'(a)$$

$$f'(a) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(b))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}$$

$$= \lim_{y \rightarrow b} \frac{y - b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}$$

$$= \frac{1}{\lim_{y \rightarrow b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b}}$$

(ii) Bez újmy na obecnosti necht' je f rostoucí, $f'(a) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} x > a \Rightarrow f(x) > f(a) \Rightarrow y > b \Rightarrow f^{-1}(y) > f^{-1}(b) \\ x < a \Rightarrow f(x) < f(a) \Rightarrow y < b \Rightarrow f^{-1}(y) < f^{-1}(b) \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{y \rightarrow b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = +\infty$$

Q.E.D.

Poznámka:

Využili jsme větu: $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, $g(x) > 0$ na $\mathcal{P}(a, \delta)$, pak $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = +\infty$ (viz V2.8-a Heine).

Příklady:

(i) $(e^x)' = e^x$, $(\log x)' = \frac{1}{x}$, neboť $\exp^{-1} = \log$.

$$e^x = y, \quad x = \log y$$

$$(e^x)' = \frac{1}{(\log y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^x$$

$$(\log y)' = \frac{1}{(e^x)'} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$$

(ii) $(\arcsin x)'$

$$y = \arcsin x, \quad x = \sin y$$

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}, \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\arcsin x)' \stackrel{\text{V.19-}}{=} \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$$

(iii) $(\operatorname{arctg} x)'$

$$y = \operatorname{arctg} x, \quad x = \operatorname{tg} y$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 y = \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos^2 y}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' \stackrel{\text{V.19-}}{=} \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

(iv) $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$

(v) $(\operatorname{arccotg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

VĚTA 20 (nutná podmínka existence lokálního extrému):

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}$, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. Nechť f má v bodě $a \in M$ lokální extrém. Potom buď $f'(a)$ neexistuje, nebo $f'(a) = 0$ (tedy má funkce v tomto bodě tečnu rovnoběžnou s osou x).

DŮKAZ:

Sporem: Nechť $f'(a)$ existuje, leč $f'(a) \neq 0$.

Z existence derivace plyne existence okolí $\mathcal{U}(a, \delta) \subseteq M$. Bez újmy na obecnosti nechť $f'(a) >$

0. Potom $\exists \xi > 0$ takové, že $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0 \quad \forall x \in \mathcal{U}(a, \xi)$.

Tedy, je-li $x < a$, pak $x - a < 0 \Rightarrow f(x) - f(a) < 0 \quad \forall x \in \mathcal{P}^-(a, \xi)$.

Naopak, je-li $x > a$, pak $x - a > 0 \Rightarrow f(x) - f(a) > 0 \quad \forall x \in \mathcal{P}^+(a, \xi)$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) < f(a), x \in \mathcal{P}^-(a, \xi) \\ f(x) > f(a), x \in \mathcal{P}^+(a, \xi) \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ nemá lokální extrém v } a$$

‡ Spor

Typická úloha

f spojitá na $[a, b]$, najděte maximum (minimum) funkce na $[a, b]$.

Postup:

1. f spojitá na $[a, b] \Rightarrow f$ nabývá maxima, minima
2. V.20- \Rightarrow tyto extrémy mohou být pouze v bodech, kde:

(i) $f'(x_0) = 0$

(ii) $f'(x_0)$ neexistuje

(iii) $x_0 = a, x_0 = b$

Příklad:

Tzv. “bačův problém” — bača má k dispozici 100m plotu a chce si s ním oplotit co největší pastvinu. Definuje si tedy hodnotící funkci pastviny

$$f(x) = 50x - x^2, \quad x \in [0, 50]$$

a derivací hledá maximum:

$$f'(x) \text{ existuje pro } \forall x \in (0, 50)$$

$$f'(x) = 50 - 2x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 25$$

Tedy máme 3 kandidáty na extrémy:

$$x = 25 \Rightarrow f(x) = 625 \text{ m}^2$$

$$x = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$x = 50 \Rightarrow f(x) = 0$$

L'Hospital a přátelé

Idea

Počítat limity přes derivace, když jsou tak derivace definované.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}} \stackrel{?}{=} \frac{\lim \dots \stackrel{?}{=} f'(a)}{\lim \dots \stackrel{?}{=} g'(a)}$$

VĚTA 21 (Rolleova):

Nechť f je spojitá na $[a, b]$, $a < b$ a nechť existuje $f'(x)$ pro každé $x \in (a, b)$. Nechť $f(a) = f(b)$. Pak existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že $f'(\xi) = 0$.

DŮKAZ:

- (i) Nechť $f(x) = f(a)$ pro $\forall x \in [a, b]$, pak $f'(x) = 0$ pro $\forall x \in (a, b)$.
- (ii) Nechť $\exists x \in (a, b)$, $f(x) \neq f(a)$, tedy bez újmy na obecnosti $f(x) > f(a)$. Protože f je spojitá na $[a, b]$, existuje lokální extrém $\xi \in [a, b]$ (největší $f(x)$). Dle předpokladu $f'(\xi)$ musí existovat, tedy podle V.20- je $f'(\xi) = 0$.

Q.E.D.

VĚTA 22 (Lagrangeova věta o střední hodnotě):

Nechť f je spojitá na $[a, b]$, $a < b$ a nechť existuje $f'(x)$ pro $\forall x \in (a, b)$. Potom $\exists \xi \in (a, b)$ takové, že

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

(Tedy existuje v nějakém bodě derivace (tečna) rovnoběžná s nakloněnou podstavou (spojnicí krajních bodů). **T-O-D-O**: Obrázek.)

DŮKAZ:

Definujme

$$F(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

(na základě divoké analyticko-geometrické úvahy).

Potom $F(a) = 0 \wedge F(b) = 0$. Pak podle Rolleovy věty $\exists \xi \in (a, b) : F'(\xi) = 0$. Tedy

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

a tudíž

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Q.E.D.

VĚTA 23 (Cauchyova věta o střední hodnotě):

Nechť f, g jsou spojitě na $[a, b]$, $a < b$ a nechť $\exists f'(x)$ pro $\forall x \in (a, b)$ a $\exists g'(x)$ vlastní a nenulová pro $\forall x \in (a, b)$. Potom $\exists \xi \in (a, b)$ takové, že

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

DŮKAZ:

$g(a) \neq g(b)$, neboť jinak by dle Rolleovy věty existovalo $\xi \in (a, b) : g'(\xi) = 0$, což by byl spor.
Definujeme

$$H(x) := (f(x) - f(a))(g(x) - g(a)) - (g(x) - g(a))(f(x) - f(a)).$$

Potom $H(a) = H(b) = 0$, H je spojitá na $[a, b]$, existuje H' na $[a, b]$.

Tedy dle Rolleovy věty $\exists \xi \in (a, b)$ takové, že

$$0 = H'(\xi) = f'(\xi)(g(b) - g(a)) - g'(\xi)(f(b) - f(a)) \Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

(neboť $g'(\xi) \neq 0$, $g(b) - g(a) \neq 0$).

Q.E.D.

VĚTA 24 (L'Hospitalovo pravidlo):

Nechť $a \in \mathbb{R}^*$ a funkce f, g jsou definovány na nějakém $\mathcal{P}^+(a, \delta)$.

(i) Nechť $\lim_{x \rightarrow a_+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a_+} g(x) = 0$ a existuje

$$\lim_{x \rightarrow a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Potom

$$\lim_{x \rightarrow a_+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(ii) Nechť $\lim_{x \rightarrow a_+} |g(x)| = +\infty$ a existuje

$$\lim_{x \rightarrow a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Potom

$$\lim_{x \rightarrow a_+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Příklad:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$$

DŮKAZ:

(i) Nechť $a \in \mathbb{R}$ a nechť

$$\lim_{x \rightarrow a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}.$$

Potom

$$\exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{P}^+(a, \delta) : \exists f'(x) \in \mathbb{R}, g'(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

“Dodefinuji” funkce f a g v bodě A : $f(a) = g(a) = 0$. Nyní nechť $x \in \mathcal{P}^+(a, \delta)$. (Obrázek.) Potom f, g jsou spojitě na $[a, x]$, neboť obě mají vlastní derivaci na celém $\mathcal{P}^+(a, \delta)$.

Tedy jsou splněny předpoklady V.23- (na intervalu $[a, x]$!) a proto platí, že $\exists \xi \in (a, x)$ takové, že

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

(ξ závisí na x ! Značíme $\xi = \xi(x)$.)

Zvolme $\varepsilon > 0$. Víme, že existuje $\omega > 0$ takové, že

$$\forall y \in \mathcal{P}^+(a, \omega) : \frac{f'(y)}{g'(y)} \in \mathcal{U}(A, \varepsilon).$$

Pro $x \in \mathcal{P}^+(a, \delta) \cap \mathcal{P}^+(a, \omega)$ najdeme $\xi = \xi(x)$ podle receptu na začátku důkazu. Potom

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in \mathcal{U}(A, \varepsilon).$$

Víme ale, že

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

tedy také

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in \mathcal{U}(A, \varepsilon).$$

Takže

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(i) $a = -\infty$

Převědeme na předchozí případ pomocí substituce

$$F(y) = f\left(-\frac{1}{y}\right), F'(y) = f'\left(-\frac{1}{y}\right) \cdot \frac{1}{y}$$

$$G(y) = g\left(-\frac{1}{y}\right), G'(y) = g'\left(-\frac{1}{y}\right) \cdot \frac{1}{y}$$

$$\implies \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{F(y)}{G(y)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{F'(y)}{G'(y)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

(ii) Technická záležitost, považujeme za dokázané (nezkouší se).

Poznámky, příklady, varování:

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x+1}{2x+2} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{2} = \frac{2}{2}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x} \cdot \frac{1}{x^2}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x}}{x^2}$

(iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x + \sin x} = +\infty$, ale $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{1 + \cos x}$ neexistuje.

(iv) L'Hospital vhodný např. pro

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}, \dots$$

$$(v) \lim_{x \rightarrow 1^-} (2-x)^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$$

$$e^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right) \frac{\log(2-x)}{1-x}(1-x)} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)(1-x) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}(1-x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \frac{2}{\pi} \rightarrow \frac{2}{\pi}$$

$$(vi) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3^n} \stackrel{\text{Heine} + \text{L'H } \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{3^x \log 3} \stackrel{\text{L'H } \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{3^x (\log 3)^2} = 0$$

$$(vii) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} \stackrel{\text{L'H } \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

Další vlastnosti derivací

$f'_+(a)$, je $f'(a)$ spojitá zprava v a ?

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Derivace v bodě je číslo (směrnice tečny), vyjadřující míru změny. Zároveň je ale f' funkce, $x \mapsto f'(x)$.
 f buď spojitá na I , $\exists f'$ (vlastní) na I . Je f' spojitá?
 Není.

Příklad:

$\sin \frac{1}{x}$ není definována v nule.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(obrázek)

Tvrdím, že tato funkce má v nule derivaci nula.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = 0$$

$$x \neq 0 : f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - x^2 \cos \left(\frac{1}{x} \right) \frac{-1}{x^2} = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

Je f' v 0 spojitá? Není, protože $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ neexistuje.
 Co kdyby limita existovala?

VĚTA 25 (o limitě derivací):

Nechť f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$ a nechť $\exists \lim_{x \rightarrow a+} f'(x) = A \in \mathbb{R}^*$. Potom $f'_+(a) = A$.

DŮKAZ:

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{1} = A$$

Můžeme L'Hospitalovat?

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a+} (x - a) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow a+} (f(x) - f(a)) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{můžeme}$$

Q.E.D.

VĚTA 26 (vztah derivace a monotonie):

Nechť I je nezdegenovaný interval, označme $\text{Int}(I) = \{\text{vnitřní body } I\}$. Nechť f je spojitá na I a f' existuje vlastní na $\text{Int}(I)$.

- (i) Je-li $f' > 0$ na $\text{Int } I$, pak f je rostoucí na I .
- (ii) Je-li $f' \geq 0$ na $\text{Int } I$, pak f je neklesající na I .
- (iii) Je-li $f' < 0$ na $\text{Int } I$, pak f je klesající na I .
- (iv) Je-li $f' \leq 0$ na $\text{Int } I$, pak f je nerostoucí na I .

DŮKAZ:

Idea: Mějme $f(a)$, $f(b)$, pak existuje mezi a a b bod ξ , $0 < f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Lagrange:

$$\forall a, b \in I \ (a < b) \ \exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ale $f'(\xi) > 0 \wedge b - a > 0 \Rightarrow f(b) - f(a) > 0 \Rightarrow f(b) > f(a) \Rightarrow f$ rostoucí na I .

Pro ostatní případy analogicky.

Q.E.D.

Poznámka:

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} > 0 \quad \forall x \in D(f)$$

Ale funkce f není rostoucí na $D(f)$. Tedy je důležitá úloha **intervalu**.

Varování

$f' > 0$ na $I_1 \cup I_2 \not\Rightarrow f$ rostoucí na I_1, I_2 .

Konvexní a konkávní funkce

Definice:

Nechť f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci. Označíme

$$T_a = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, y = f(a) + f'(a)(x - a)\}.$$

Řekneme, že bod $[x, f(x)] \in \mathbb{R}^2$ leží nad (pod) **tečnou** T_a , jestliže $f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$ (resp. $f(x) < \dots$).

Definice:

Nechť f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci. Řekneme, že f má v bodě a **inflexi**, jestliže $\exists \delta$ tak, že:

Buď: $\forall x \in (a - \delta, a) : [x, f(x)]$ leží nad T_a a $\forall x \in (a, a + \delta) : [x, f(x)]$ leží pod T_a
nebo: $\forall x \in (a - \delta, a) : [x, f(x)]$ leží pod T_a a $\forall x \in (a, a + \delta) : [x, f(x)]$ leží nad T_a .

VĚTA 27 (nutná podmínka existence inflexe):

Jestliže $f''(a) \neq 0$, pak f nemá v bodě a inflexi.

DŮKAZ:

Bez újmy na obecnosti nechť $f''(a) > 0$. Potom

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} > 0$$

Tedy $\exists \delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in (a, a + \delta) : f'(x) > f'(a) \wedge \forall x \in (a - \delta, a) : f'(x) < f'(a)$$

Zvolme $y \in (a, a + \delta)$. Pak f je spojitá na $[a, y]$ a $\exists f'$ na (a, y) . Tedy dle pana Lagrange $\exists \xi \in (a, y)$:

$$\frac{f(y) - f(a)}{y - a} = f'(\xi) > f'(a)$$

$$f(y) > f(a) + f'(a)(y - a) \quad \forall y \in (a, a + \delta)$$

Tedy jsme nad T_a .

Analogicky:

Zvolme $z \in (a - \delta, a)$. Pak f je spojitá na $[z, a]$ a $\exists f'$ na (z, a) . Tedy dle pana Lagrange $\exists \psi \in (z, a)$:

$$\frac{f(a) - f(z)}{a - z} = f'(\psi) < f'(a)$$

$$f(z) < f(a) + f'(a)(z - a) \quad \forall z \in (a - \delta, a)$$

Tedy není inflexe v a !

Poznámky:

- (i) $f''(a) = 0 \not\Rightarrow f$ má v bodě a inflexi!
 Viz $f(x) = x^4$, $a = 0$. $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$, $f''(0) = 0$.
- (ii) Jestliže $f''(a)$ neexistuje, pak f může a nemusí mít inflexi v bodě a .
 Viz $f(x) = x|x|$. $f''(0)$ neexistuje, ale f má v bodě nula inflexní bod.

VĚTA 28 (postačující podmínka pro existenci inflexe):

Nechť f má spojitou první derivaci na intervalu (a, b) . Nechť $z \in (a, b)$. Nechť pro $\forall x \in (a, z)$ platí $f''(x) > 0$ a pro $\forall x \in (z, b)$ platí $f''(x) < 0$ (nebo naopak). Pak z je bod inflexe funkce f .

DŮKAZ:

Nechť $f'' > 0$ na (a, z) , $f'' < 0$ na (z, b) . Potom dle V.26- je f' rostoucí na (a, z) a klesající na (z, b) .

$$\exists \xi \in (z, b) : \frac{f(b) - f(z)}{b - z} = f'(\xi) < f'(z)$$

$$\Rightarrow f(b) < f(z) + f'(z)(b - z)$$

(pod tečnou)

$$\exists \eta \in (a, z) : \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = f'(\eta) < f'(z)$$

$$\Rightarrow f(a) > f(z) + f'(z)(a - z)$$

(nad tečnou)

Totéž platí pro každý bod $x \in (z, b)$ a $y \in (a, z)$, tedy

$$\left. \begin{array}{l} f(x) < f(z) + f'(z)(x - z) \\ f(y) > f(z) + f'(z)(y - z) \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ má v bodě } z \text{ inflexi.}$$

Q.E.D.

Příklad:

$$f(x) = \operatorname{arctg} x$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(1 + x^2)^2} 2x$$

$$f''(x) = \frac{-2x}{(1 + x^2)^2} \begin{cases} > 0 & \text{pro } x < 0 \\ < 0 & \text{pro } x > 0 \end{cases} \Rightarrow f \text{ má v } 0 \text{ inflexi}$$

$$f''(0) \text{ existuje} \Rightarrow f''(0) = 0$$

T-O-D-O: TADY TOHO **HODNĚ** CHYBÍ! (DEFINICE KONK/KONV, TŘI VĚTY, ASYMPTOTY, ...)

Asymptoty

(Zhruba.)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/x = a$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = b$$

Pokud jsou obě limity konečné, asymptota je

$$y = ax + b$$

(jinak asymptota není).

(Ekviv. druhá asymptota pro $-\infty$.)

Průběh funkce

Cvičení:

Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

(1) $D(f)$

$$\begin{aligned} D\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) &= \mathbb{R} \\ D(\arcsin) &= [-1, 1] \\ \Rightarrow D(f) &= \{x \in \mathbb{R}, -1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1\} \\ \left. \begin{aligned} -1 &\leq \frac{2x}{1+x^2} \\ -1-x^2 &\leq 2x \\ 0 &\leq 1+2x+x^2 = (x+1)^2 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow x \in \mathbb{R} \\ \left. \begin{aligned} \frac{2x}{1+x^2} &\leq 1 \\ 2x &\leq 1+x^2 \\ 0 &\leq 1-2x+x^2 = (x-1)^2 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow D(f) &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

Obor spojitosti: $2x, 1+x^2$ — polynomy \Rightarrow spojité na \mathbb{R} . \sin spojité a ryze monotonní na $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow$ dle věta o inverzní funkci je \arcsin spojité na $[-1, 1] \Rightarrow$ dle VOLSF (P1) je f spojitá na \mathbb{R} .

(2) Průsečík s osou y : $f(0) = 0, [0, 0]$ Průsečík(y) s osou x : $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{1+x^2} = 0 \Rightarrow x = 0, [0, 0]$

(3) Symetrie:

Funkce je lichá, neboť

$$f(-x) = \arcsin\left(\frac{-2x}{1+(-x)^2}\right) = -\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = -f(x)$$

(\arcsin je lichý).

Funkce není sudá (neboť $f \neq 0$) nebo $f(1) = \frac{\pi}{2}$, ale $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

Funkce není periodická, neboť $f(0) = 0$, ale $f(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(4) Limity v $\pm\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{1+x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \arcsin(y) = 0$$

\arcsin je spojité v 0 \Rightarrow (P1)

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

Z lichosti (nebo analogickým výpočtem)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

(5) První derivace:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{(1+x^2)^2 - 4x^2}} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{(1-x^2)^2}} \\ &\Rightarrow f'(x) = \frac{2}{1+x^2} \cdot \frac{1-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2}} \end{aligned}$$

pro $x \neq \pm 1$.

Pozn.: $\sqrt{y^2} = |y|$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2}{1+x^2} \cdot \frac{1-x^2}{|1-x^2|}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$$

Pozn.: $\frac{y}{|y|} = \text{sign}(y)$ jen pro $y \neq 0$!

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$-\frac{2}{1+x^2}$	$\frac{2}{1+x^2}$	$-\frac{2}{1+x^2}$

Existuje $f'(\pm 1)$? Nevíme, ale spočítáme $f'_\pm(\pm 1)$. Dvě možnosti:

- Z definice: $f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$
- Z věty o limitě derivací: $f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1+} f'(x)$, f je spojitá na $\mathcal{P}^+(1)$.

Z věty o limitě derivací:

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{-2}{1+x^2} \stackrel{\text{dosazení } \pm \text{ spojitost}}{=} \frac{-2}{1+1} = -1$$

$$f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) - \frac{\pi}{2}}{x - (-1)}$$

$$\stackrel{\text{L'H } \frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{2}{1+x^2} \stackrel{\text{dosazení}}{=} \frac{2}{1+1} = 1$$

$\Rightarrow f'(1)$ neexistuje

(Analogicky $f'(-1)$ neexistuje. Buď z lichosti nebo analogickým výpočtem.)

(6) Intervaly monotonie:

$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f' < 0 \Rightarrow \nearrow$	$f' > 0 \Rightarrow \searrow$	$f' < 0 \Rightarrow \nearrow$

(7) Extrémy:

Mohou být jen v bodech x , kde $f'(x)$ neexistuje nebo $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \dots \text{neexistují} \\ f'(x) \neq \dots x = \pm 1, \text{ kandidáti na extrém} \end{aligned}$$

(i) $x = -1$:

$$\left. \begin{aligned} f \searrow \dots \mathcal{P}^-(-1, \delta) \\ f \nearrow \dots \mathcal{P}^+(-1, \delta) \end{aligned} \right\} \Rightarrow -1 \text{ je bod lokálního minima}$$

(ii) $x = 1$:

Z lichosti: $x = 1$ je bod lokálního maxima. Další extrémy f nemá.

Jsou extrémy globální?

(i) $x = -1$:

$$\begin{aligned} f \searrow \dots (-\infty, -1) \Rightarrow f(y) \geq f(-1) \quad \forall y \in (-\infty, -1) \\ f \nearrow \dots (-1, 1) \Rightarrow f(y) \geq f(-1) \quad \forall y \in (-1, 1) \end{aligned}$$

$$f(-1) = -\frac{\pi}{2}, \quad f(y) \leq 0 \quad \forall x \in (1, \infty) \Rightarrow f(y) \geq f(-1)$$

Tedy -1 je globální minimum.

(ii) $x = 1$:

Z lichosti: $x = 1$ je bod globálního maxima.

(8) Druhá derivace, konvexita:

$$\left(\frac{2}{1+x^2} \right)' = \frac{-2}{(1+x^2)^2} \cdot 2x = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$-\frac{2}{1+x^2}$	$\frac{2}{1+x^2}$	$-\frac{2}{1+x^2}$
$f''(x)$	$\frac{4x}{(1+x^2)^2}$	$-\frac{4x}{(1+x^2)^2}$	$\frac{4x}{(1+x^2)^2}$
	$f'' < 0 \Rightarrow \cup$ (konk.)	$f'' > 0$ na $(-1, 0) \Rightarrow \cap$ $f'' < 0$ na $(0, 1) \Rightarrow \cup$	$f'' > 0 \Rightarrow \cap$ (konv.)

$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
\cap	\cup	\cap	\cup

$f''(\pm 1)$ neexistuje, neboť $f'(\pm 1)$ neexistuje.

(9) Inflexní body:

Buď $f'' \neq$ nebo $f''(x) = 0$.

$f'' \neq$: $x = \pm 1$ — bod inflexe není, neboť $\nexists f'$. $f''(x) = 0$: $x = 0$ — kandidát na inflexi.

$$\left. \begin{aligned} f'' > 0 \dots \mathcal{P}^-(0, \delta) \\ f'' < 0 \dots \mathcal{P}^+(0, \delta) \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 0 \text{ je inflexním bodem.}$$

Jiné inflexní body f nemá (nutná podmínka jinde nesplněna).

(10) Asymptoty:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 0x) = 0$$

$$a = b = 0$$

Nulová přímka, tedy osa x .

(11) Obor hodnot:

$$H(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$-\frac{\pi}{2} \dots \text{globální minimum, } -\frac{\pi}{2} = f(-1)$$

$$\frac{\pi}{2} \dots \text{globální maximum, } \frac{\pi}{2} = f(1)$$

Darboux
 $\Rightarrow f$ nabývá každé mezihodnoty

Taylorův polynom

Opakování

Polynom je každá funkce tvaru

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ pevné — koeficienty. $x \in \mathbb{R}$ je proměnná.

Poznámky:

- (i) Všechny polynomy jsou definovány a spojité na \mathbb{R} .
- (ii) Jestliže $a_n \neq 0$, pak n = stupeň polynomu.
- (iii) Je-li \mathcal{P} polynom, stupeň $\mathcal{P} = n$, pokud \mathcal{P}' je polynom, stupeň $\mathcal{P}' = n - 1$.

Příklady:

$\deg \mathcal{P} = 0 \Rightarrow \mathcal{P}$ konstantní, $\mathcal{P}(x) \equiv a_0$

$\deg \mathcal{P} = 1 \Rightarrow \mathcal{P}(x) = a_0 x + a_0$ lineární

$\deg \mathcal{P} = 2 \Rightarrow$ kvadratická funkce, atd.

Motivace

Aproximace funkcí pomocí polynomů.

Mějme f , $a \in \mathbb{R}$, $\exists f'(a) \in \mathbb{R}$. Tečna $t(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$. Potom

$$\begin{aligned} f(a) &= t(a) \\ f'(a) &= t'(a) \end{aligned}$$

Navíc

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - t(x)) &= 0 \text{ (triviální), ale i} \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - t(x)}{x - a} &\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow a} (f'(x) - t'(x)) = 0 \text{ (aproximace je lepší než lineární)} \end{aligned}$$

Chceme aproximace vyšších řádů.

Idea

Mějme f , $a \in \mathbb{R}$, $\exists f'(a) \in \mathbb{R}$. Chceme funkci f aproximovat polynomem v bodě a .

Aproximace polynomem stupně 1

$$P_1(x) = \alpha x + \beta$$

Polynom by měl procházet bodem a :

$$P_1(a) = f(a) \Rightarrow P_1(x) = c(x - a) + f(a)$$

(tedy hodnota funkce a aproximujícího polynomu splývají).

Zároveň chci:

$$P_1'(a) = f'(a) \Rightarrow P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Nejlepší aproximace polynomem stupně ≤ 1 je totiž **tečna** $t(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$. Potom

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - t(x)}{x - a} = 0$$

Ukazuje se, že tyto dva požadavky jsou ekvivalentní.

Aproximace polynomem stupně 2

Příklad: $\cos x$ — lineární aproximace nic moc, kvadratická aproximace je už lepší. $P_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + c(x - a)^2$, $c = ?$.

Chci:

$$\begin{aligned} P_2(a) &= f(a) \\ P_2'(a) &= f'(a) \end{aligned} \wedge P_2''(a) = f''(a)$$

$$\Rightarrow P_2'(x) = f'(a) + 2c(x - a) \Rightarrow P_2'(a) = f'(a)$$

(první derivace splývá)

$$\Rightarrow P_2''(x) = 2c \Rightarrow c = \frac{f''(a)}{2}$$

$$\Rightarrow P_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2$$

To je nejlepší kvadratická aproximace f v bodě a .

Navíc platí:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P_2(x)}{(x - a)^2} = 0$$

(Důkaz: < cvičení >)

Definice:

Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak funkci

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

nazýváme **Taylorovým polynomem funkce f řádu n v bodě a** .

Poznámky:

- (i) $T_n^{f,a}$ je polynom, $\deg T_n^{f,a} \leq n$.
- (ii) Příklad: $f(x) = \sin x$, $a = 0$, potom:

$$T_1^{\sin,0}(x) = x$$

$$T_2^{\sin,0}(x) = x \quad (\text{neboť } \sin''(0) = 0)$$

$$T_3^{\sin,0}(x) = x - \frac{x^3}{6} \quad (\text{cvičení})$$

$$T_4^{\sin,0}(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

Poučení: $\deg T_n^{f,a}$ nemusí být roven n .

- (iii) Derivace Taylorova polynomu:

$$(T_n^{f,a})'(x) = 0 + f'(a) + f''(a)(x - a) + \frac{f'''(a)}{2}(x - a)^2 +$$

$$+ \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x - a)^{n-1} = T_{n-1}^{f',a}$$

Tedy $(T_n^{f,a})'(x) = T_{n-1}^{f',a}$. (!)

(iv) Splývání polynomu a funkce:

$$\left. \begin{array}{l} T_n^{f,a}(a) = f(a) \\ (T_n^{f,a})'(a) = f'(a) \\ \vdots \\ (T_n^{f,a})^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \end{array} \right\} (n+1) \text{ požadavků.}$$

Otázka

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} \stackrel{?}{=} 0$$

VĚTA 33 (o aproximaci funkce Taylorovým polynomem):

Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$ a nechť existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Nechť \mathcal{P} je polynom, $\deg \mathcal{P} \leq n$. Pak platí:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - \mathcal{P}(x)}{(x-a)^n} = 0 \iff \mathcal{P} = T_n^{f,a}$$

Poznámka:

“ \Leftarrow ”

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$$

(odpověď na otázku je kladná)

“ \Rightarrow ”

Tuto vlastnost má mezi polynomy stupně $\leq n$ jen Taylorův.

DŮKAZ:

“ \Leftarrow ”

Indukcí:

($n = 1$)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_1^{f,a}}{x-a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a) \right) = 0 \end{aligned}$$

($n-1 \rightsquigarrow n$)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} &\stackrel{\text{L'H}}{=} \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - (T_n^{f,a})'(x)}{n(x-a)^{n-1}} = \\ &= \frac{1}{n} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f',a}(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0 \quad (\text{dle indukčního předp.}) \end{aligned}$$

“ \Rightarrow ”

(1. krok)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\mathcal{P}(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = \underbrace{\lim_{x \rightarrow a} \frac{\mathcal{P}(x) - f(x)}{(x-a)^n}}_{0 \text{ (předp.)}} + \underbrace{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n}}_{0 \text{ (právě dok.)}}$$

LEMMA: Q polynom, $\deg Q \leq n$, $a \in \mathbb{R}$ a platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0$$

pak $Q \equiv 0$.**DŮKAZ:**

Indukcí:

(1) $n = 1$: Q je lineární, $Q(a) = 0$ (viz níže) $\Rightarrow Q(x) = c(x-a)$, $c \in \mathbb{R}$.

Víme:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{Q(x)}{x-a} &= 0 \\ \Rightarrow 0 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{c(x-a)}{x-a} = c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow Q(x) \equiv 0 \end{aligned}$$

(2) $n-1 \rightsquigarrow n$:

$$\left. \begin{array}{l} \deg Q \leq n \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow Q(a) = 0$$

 $\Rightarrow a$ je kořen polynomu Q $\Rightarrow Q(x) = (x-a)R(x)$, R je polynom, $\deg R \leq n-1$

Potom

$$0 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)R(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{R(x)}{(x-a)^{n-1}}$$

$$\xrightarrow{\text{ind. předp.}} R \equiv 0 \Rightarrow Q(x) = (x-a) \cdot 0 \Rightarrow Q \equiv 0$$

Q.E.D. (důkaz lemmatu)

(2. krok)

Víme:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\mathcal{P}(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$$

 $(\mathcal{P}(x) - T_n^{f,a}(x))$ je polynom, $\deg \leq n$)

$$\stackrel{\text{lemma}}{\implies} \mathcal{P}(x) - T_n^{f,a}(x) \equiv 0 \Rightarrow \mathcal{P} = T_n^{f,a}$$

*Q.E.D.***Příklad:**

$$\left. \begin{array}{l} f = \sin \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$$

(plyne z implikace “ \Leftarrow ”)**VĚTA 34 (obecný tvar zbytku):**Nechť f má vlastní $(n+1)$ -ní derivaci v intervalu $[a, x]$, $a, x \in \mathbb{R}$, $x > a$.Nechť φ je spojitá funkce na $[a, x]$, která má na (a, x) vlastní a nenulovou derivaci.Pak existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$R_n^{f,a}(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi) (x-a)^n$$

(obrázek)

Důsledek 1 (Lagrangeův tvar zbytku):

$$R_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) (x-a)^{n+1} \quad (\exists \xi \in (a, x))$$

DŮKAZ:Volím $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$. (cvičení)**Důsledek 2 (Cauchyův tvar zbytku):**

$$R_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) (x-\xi)^n (x-a) \quad (\exists \xi \in (a, x))$$

DŮKAZ:Volím $\varphi(t) = t$. (cvičení)**DŮKAZ:**Pro $t \in [a, x]$ definujeme

$$F(t) := f(x) - T_n^{f,t}(x) = f(x) - \left(f(t) + \frac{f'(t)}{1!} (x-t) + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!} (x-t)^n \right)$$

Potom:

- (i) F je spojitá na $[a, x]$ a má vlastní derivaci na (a, x) .
- (ii) $F(a) = f(x) - T_n^{f,a}(x) = R_n^{f,a}(x)$
- (iii) $F(x) = 0$
- (iv) φ je spojitá, $\exists \varphi' \neq 0$ vlastní na (a, x)

Tedy podle V.23- (Cauchy o střední hodnotě):

$$\exists \xi \in (a, x) : \quad \frac{F(x) - F(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$$

Přitom:

$$\begin{aligned} F'(t) &= - \left(f'(t) + f''(t)(x-t) + f'(t)(-1) + \frac{f'''(t)}{2}(x-t)^2 + \frac{f''(t)}{2}2(x-t)(-1) + \right. \\ &\quad \left. + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}n(x-t)^{n-1}(-1) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \right) \\ &\stackrel{\text{požírání}}{\implies} F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \quad \forall t \in (a, x) \\ &\implies F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \end{aligned}$$

Platí tedy:

$$\begin{aligned} \frac{F(x) - F(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} &= \frac{0 - R_n^{f,a}(x)}{\varphi(x) - \varphi(a)} \\ &= \\ \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)} &= \frac{-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n}{\varphi'(\xi)} \end{aligned}$$

To znamená:

$$R_n^{f,a}(n) = \frac{1}{n!} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n$$

Q.E.D.

Pozn.: V.32- platí i pro $x < a$.

Příklad:

Rozvoj funkce e^x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x, \quad f(x) = e^x, \dots, \quad f^{(n)}(x) = e^x \\ a = 0 &\implies f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n)}(a) = 1 \end{aligned}$$

Zavedme si:

$$T_n^{\text{exp},0} = \sum_{j=0}^n \frac{x^j}{j!}$$

Pak:

$$e^x = \sum_{j=0}^n \frac{x^j}{j!} + R_n^{\text{exp},0}(x) = \sum_{j=0}^n \frac{x^j}{j!} + e \frac{\xi^n}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Pro každé pevné x je $\xi n \in (a, x) \quad \forall n \in N$, tedy $e^{\xi n} \leq e^x$. Tudíž

$$|R_n^{\text{exp},0}(x)| \leq \frac{e^x |x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n^{\exp, 0}(x)| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \frac{x^j}{j!} = e^x \Rightarrow e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Důsledek:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

a speciálně pro $x = 1$:

$$e = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \dots$$

Chceme-li spočítat e s přesností 0,001:

$$e = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j!} = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1+j)!} \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} + \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^j} = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} + \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} + \frac{1}{n \cdot n!}$$

Tedy:

$$\sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} < e < \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} + \frac{1}{n \cdot n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(na přesnost 0,001 stačí $n = 6$)

Důkaz iracionality e

Nechť $e = p/q$, kde $p, q \in \mathbb{N}$. Potom pro

$$m = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!}$$

máme

$$m < \frac{p}{q} < m + \frac{1}{n \cdot n!}$$

$$qmn! < pn! < qmn! + \frac{q}{n}$$

Nyní stačí zvolit $n > q$.

✗ *Spor*

Rozvoj funkce \sin

Mějme \sin , $a = 0$:

$$\sin'(x) = \cos(x) \quad \sin'(0) = 1$$

$$\sin''(x) = -\sin(x) \quad \sin''(0) = 0$$

$$\sin'''(x) = -\cos(x) \quad \sin'''(0) = -1$$

$$\sin''''(x) = \sin(x) \quad \sin''''(0) = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow T_{2n+1}^{\sin,0}(x) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} \\ R_{2n+1}^{\sin,0}(x) &= \frac{1}{(2n+2)!} \sin^{(2n+2)}(\xi_n) \cdot x^{2n+2} \\ |R_{2n+1}^{\sin,0}(x)| &\leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \rightarrow 0 \quad \forall x, n \rightarrow \infty \\ \Rightarrow \sin x &= \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Obdobně

$$\cos x = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Rozvoj funkce $\log(x+1)$

Mějme $f(x): y = \log(x+1)$. Pro $x = 0$ pak $f(0) = 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} \\ f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} \\ f'''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} (-1)^{n+1} \\ f^{(n)}(0) &= (-1)^{n-1} (n-1)! \\ \Rightarrow T_n^{\log(x+1),0}(x) &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{j!} (-1)^{j-1} (j-1)! \cdot x^j = \sum_{j=0}^n (-1)^{j-1} \frac{x^j}{j} \\ R_n^{\log(x+1),0}(x) &= \frac{1}{(n+1)!} \frac{(-1)^n \cdot n!}{(1+\xi)^{n+1}} x^{n+1} = \frac{(-1)^n \cdot x^{n+1}}{n(1+\xi)^{n+1}} \end{aligned}$$

To nelze odhadnout pro $|x| \geq 1$, pro $|x| < 1$ ano:

$$\Rightarrow \log(x+1) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{x^j}{j}, \quad x \in (-1, 1]$$

Definice:

Řekneme, že funkce f je v bodě a zprava **malá řádu** n , jestliže

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Píšeme

$$f(x) = \sigma((x-a)^n), \quad x \rightarrow a+$$

(Laudaův symbol).

Pozor: Jde pouze o symboliku, *neplatí* žádná rovnost!

Příklady:

- (i) $e^x = \sum_{j=0}^n \frac{x^j}{j!} + \sigma(x^n), \quad x \rightarrow 0_+$
(ii) $x - \sin x = \sigma(x^2), \quad x \rightarrow 0$
(iii) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \sigma(x^3), \quad x \rightarrow 0$

Příklad:

Mějme sumu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+p}}$$

Pro která p konverguje?

Raabe:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+p} - 1 \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{e} \cdot e^{(n+p) \log(1 + \frac{1}{n})} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{e} \cdot e^{(n+p) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \sigma\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)} - 1 \right) = \\ &= p - \frac{1}{2} - 1 + \underbrace{\sigma\left(\frac{1}{n}\right)}_{\rightarrow 0}, \end{aligned}$$

tedy konverguje pro $p > \frac{3}{2}$.