

Barvení map a grafů

Politická mapa (obrázek).
Tři barvy obecně nestačí.

Předpoklady

- (1) Každý stát je souvislý.
- (2) Státy sousedící pouze v jednotlivých bodech nebudeme považovat za sousední.

Problém čtyř barev

Stačí čtyři barvy na obarvení libovolné politické mapy?
Ano, ale důkaz je extrémně těžký.

Definice:

$G = (V, E)$ lze (řádne) **obarvit** k barvami, pokud existuje zobrazení $b: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ takové, že $\{x, y\} \in E \Rightarrow b(x) \neq b(y)$.

Definice:

Barevnost grafu $G = \chi(G) = \min\{k : G \text{ lze obarvit } k \text{ barvami}\}$.

Příklady:

- (i) $\chi(C_{2k}) = 2$
- (ii) $\chi(C_{2k+1}) = 3$
- (iii) $\chi(K_n) = n$
- (iv) $\chi(K_{m,n}) = 2$ ($m, n \geq 1$)
- (v) $\chi(T) = 2$ (T strom na ≥ 2 vrcholech)

Vztah mezi barvením map a rovinných grafů

(náznak)

V každém státě vybereme za vrchol hlavní město, pospojujeme hranami hlavní města sousedních států, jistě to lze udělat tak, že graf, který dostaneme, je rovinný.

Řekneme, že mapa je k -obarvitelná \Leftrightarrow rovinný graf je k -obarvitelný.

Problém čtyř barev II.

Jiná formulace:

$\chi(G) \leq 4$ pro každý rovinný graf G ?

VĚTA (o pěti barvách):

$\chi(G) \leq 5$ pro každý rovinný graf $G = (V, E)$.

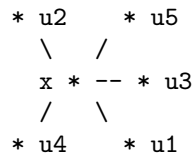
DŮKAZ:

Indukcí podle $|V|$:

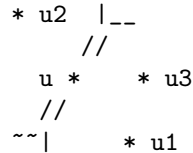
- (1) $|V| \leq 5$: zřejmé.
- (2) $|G|$ rovinný, $|V| \geq 6$ a předpokládáme, že věta platí pro rovinné grafy s menším počtem vrcholů.
 G má vrchol x , $\deg x \leq 5$ (Eulerův vztah).

- (a) $\deg x \leq 4$: Obarvíme $G - x$ pěti barvami podle indukčního předpokladu, poté dobarvíme x barvou, která se nevyskytuje na jeho sousedech.

- (b) $\deg x = 5$: Necht' sousedé jsou označeni u_1, \dots, u_5 . G je rovinný, tudíž neobsahuje podgraf K_5 — to ale znamená, že nemůžou být všichni sousedé vzájemně pospojováni hranami. Bez újmy na obecnosti necht' např. $\{u_4, u_5\} \notin E$.



V grafu $G - x$ ztotožníme u_4 a u_5 (tím nám nevznikne žádné křížení):



Podle indukčního předpokladu existuje obarvení b_0 pěti barvami. Obarvení $G - x$ pak můžeme definovat jako:

$$\begin{aligned}
 b(v) &:= b_0(v) & v \neq u_4, u_5 \\
 b(u_4) &= b(u_5) := b_0(u)
 \end{aligned}$$

Dobavíme vrchol x barvou různou od $b(u_1), b(u_2), b(u_3), b(u_4) = b(u_5)$.

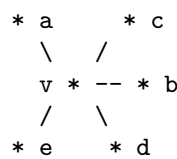
Q.E.D.

Pozor: Důkaz neprobíhá tak, že vezmu rovinný graf a přidám vrchol. Naopak vezmu libovolný graf, o kterém pouze vím, že libovolný menší graf je rovinný.

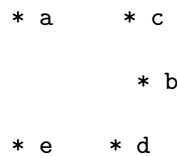
Alternativní důkaz:

Indukcí podle $|V|$:

- (1) $|V| \leq 5$: zřejmé.
- (2) $|V| \geq 6$: Necht' v je vrchol nejmenšího stupně. Dle Eulerova formule $\Rightarrow \deg v \leq 5$. $G - v$ lze obarvit pěti barvami (dle ind. předpokladu).



Vrchol v vyhodíme:



Bez újmy na obecnosti: a, b, c, d, e mají různou barvu.

$$\begin{aligned}
 f(a) &= \text{modrá} \\
 f(b) &= \text{červená} \\
 f(c) &= \text{žlutá} \\
 f(d) &= \text{zelená}
 \end{aligned}$$

Neexistuje žluto–zelená cesta z c do d nebo neexistuje modro–červená cesta z a do b .

Pokud by existovaly, musely by se křížit — buď mimo vrchol (to nesmějí) nebo ve vrcholu (ale jak ho pak obarvit?).

Bez újmy na obecnosti nechť neexistuje cesta $c \sim d$.

Přebarvíme barvy v žluto–zelené komponentě obsahující d (prohodíme žlutou a zelenou). I toto obarvení je korektní, neboť komponenta je maximální a její sousedé mají všichni jiné barvy.

Teď má ale c a d stejnou barvu, takže v můžeme obarvit barvou nevyskytující se na sousedech.

⟨písnička⟩

Q.E.D.