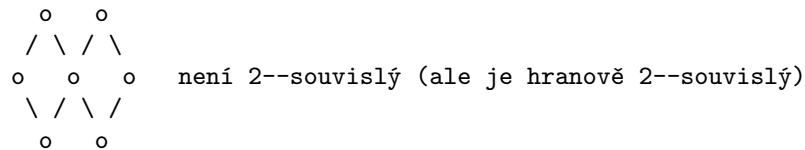
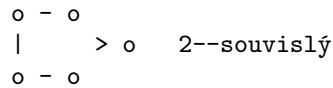


2-souvislost

Definice:

Graf $G = (V, E)$ je (**vrcholově**) **2-souvislý**, pokud $|V| \geq 3$ a $G - v$ je souvislý pro $\forall v \in V$.

Příklad:



Pozorování:

$$G \text{ je 2-souvislý} \Rightarrow \begin{cases} G + e & \text{2-souvislý pro } \forall e \notin E. \\ G - e & \text{souvislý pro } \forall e \in E. \\ G \% e & \text{2-souvislý pro } \forall e \in E. \end{cases}$$

DŮKAZ:

(a) zřejmé

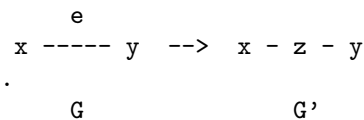
(b) $e = \{x, y\} \in E$

$G - x$ souvislý $\Rightarrow y$ je v $G - e$ v jedné komponentě se všemi vrcholy $v \neq x, y$.

$G - y$ souvislý $\Rightarrow x$ je v $G - e$ v jedné komponentě se všemi vrcholy $v \neq x, y$.

Tedy $G - e$ má určitě jednu komponentu, takže je souvislý.

(c)



$G' - v$ souvislý $\forall v \neq z$. $G' - z = G - e$ souvislý podle (b).

Q.E.D.

Definice:

Grafy $G = (V, E)$ je **hranově 2-souvislý**, pokud G je souvislý a $G - e$ je souvislý pro $\forall e \in E$.

VĚTA ():

G je 2-souvislý $\Leftrightarrow G$ vznikne z $K_3 = \triangle$ postupným přidáváním a dělením hran.

T-O-D-O: Obrázek úplného trojúhelníčku s vrcholem uprostřed a jeho odvození z trojúhelníčku.

DŮKAZ:

“ \Rightarrow ”

Δ je 2-souvislý, přidávání a dělení hran uchovává 2-souvislost.

“ \Leftarrow ”

Nebudeme dělat.

Q.E.D.

VĚTA ():

V 2-souvislém grafu leží každé 2 vrcholy na společné kružnici.

DŮKAZ:

Podle předchozí věty stačí dokázat:

- (i) Věta platí pro Δ . Triviální.
- (ii) Věta platí pro $G \Rightarrow$ platí i pro $G + e$ (triviální).
- (iii) Věta platí pro $G \Rightarrow$ platí i pro $G \% e$:
Nechť $u \in V(G)$, $z \in V(G') \setminus V(G)$ (vytvořený na $e = (x, y)$). Leží u, z na společné kružnici? (Ostatní případy jsou triviální.)
 $C =$ kružnice v G společná pro x, u .
 - (1) $y \in C$ — **T-O-D-O:** Obrázek D1
 - (2) $y \notin C$ — **T-O-D-O:** Obrázek D2
 $P =$ nejkratší cesta z y do $V(C)$ v $G - x$. Pak nová kružnice vede z x přes z do y , pak po P až k nějakému vrcholu C a poté po C až zpět k x .

Poznámka:

V 2-souvislém grafu též každé 2 hrany leží na společné kružnici. (Bez důkazu).