

Věta o sudosti (princip sudosti)

$$\forall G = (V, E) : \sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|$$

DŮKAZ:

Vlevo každá hrana přispěje $2 \times$.

Q.E.D.

Důsledek:

$\forall G$: počet vrcholu každého stupně je sudý.

Poznámka:

Neplatí pro nekonečné grafy (o-o-o-o-...).

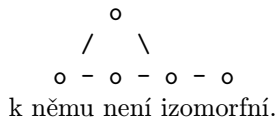
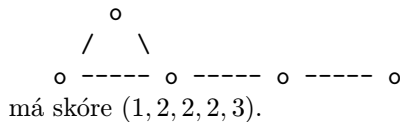


Skóre grafu

$$G = (\{v_1, \dots, v_n\}, E), \text{ skóre grafu } \mathbf{G} = D(G) = (\deg_G(v_1), \dots, \deg_G(v_n))$$

Dvě skóre považujeme za stejná, pokud se liší pouze pořadím prvků.

Příklad:



Věta o skóre:

$$D = (d_1, \dots, d_n, 0 \leq d_1 \leq \dots \leq d_n)$$

D je skóre nějakého grafu, právě když

$$D' = (d_1, \dots, d_{n-d_n-1}, d_{n-d_n} - 1, \dots, d_{n-2} - 1, d_{n-1} - 1)$$

je skóre nějakého grafu.

Příklady použití:

Je (1, 2, 3, 3, 3, 4, 4) skóre nějakého grafu?

(1, 2, 2, 2, 2, 3) skóre nějakého grafu?

$$(1, 2, 1, 1, 1)$$

$$(1, 1, 1, 1, 2)$$

$$(1, 1, 0, 0) \Leftrightarrow (0, 0, 1, 1)$$

$$(0, 0, 0)$$

je skóre grafu.

Je $(1, 1, 1, 2)$?

$$(1, 0, 0)$$

$$(0, 0, 1)$$

$$(0, -1)$$

není.

Je $(0, 1, 2, 3, 4, 4)$?

$$(0, 0, 1, 2, 3)$$

$$(0, -1, 0, 1)$$

DŮKAZ:

“ \Leftarrow ”

G' má skóre D' . Přidáme ke G' nový vrchol v_n a spojíme ho hranou s vrcholy v_{n-1} , v_{n-2} , \dots , v_{n-d_n} . Dostáváme tak graf se skóre D .

“ \Rightarrow ”

Předpokládáme, že $G = (\{v_1, \dots, v_n\}, E)$ má skóre D . Označme $d = d_n = \deg v_n$.

První případ: Z v_n vedou hrany do vrcholů $v_{n-1}, v_{n-2}, \dots, v_{n-d}$. Odstraněním v_n pak z těchto hran dostaneme graf se skóre D' .

Druhý případ: Neplatí první případ, tedy potom je vrchol v_n propojen s jinými vrcholy, než je posledních d_n , neboli:

$$i < n - d \leq j : \{v_i, v_n\} \in E, \{v_j, v_n\} \notin E$$

Ale protože $\deg v_i (= d_i) \leq \deg v_j (= d_j)$, existuje v_k ($k \neq i, j$) takový, že $\{v_j, v_k\} \in E$, $\{v_i, v_k\} \notin E$ (tedy existuje zase nějaký vrchol v_k takový, který je spojený s v_j , ale ne v_i a tím se stupeň kompenzuje).

Přidáme do E hrany $\{v_i, v_k\}, \{v_j, v_n\}$, odebereme z E hrany $\{v_i, v_n\}, \{v_j, v_k\}$. Skóre tak zůstává D , ale zmizela neposedná hrana mimo posledních d_n prvků (vrcholy v_i, v_j jsme místo přes v_n spojili přes v_k). Převodli jsme tedy situaci na první případ.

Q.E.D.