

Pavel Valtr

Diskrétní matematika

Přepsal Petr Baudiš
v ak. roce 2004/2005

“Beauty is the first test. There is no permanent place in the world for ugly mathematics.”
— G. H. HARDY

© 2004/2005 Pavel Valtr, Petr Baudiš

Verze 1.618/L:1.6. Tato verze není garantována, nemusí být kompletní a může obsahovat chyby.

Aktuální verzi vždy najdete na <http://math.or.cz/>.

Sazba v programu \TeX .

Základní pojmy

Množiny

Množina: soubor prvků.

Zápis:

- výčtem prvků: $X = \{a, b, c\}$
- vlastností: $X = \{i \in \mathbb{N} : \exists j \in \mathbb{N}, i = j\}$

$$X = Y \Leftrightarrow (x \in X \Leftrightarrow x \in Y) \quad \forall x$$

Je-li X konečná, $|X| \Leftrightarrow \text{len}(X)$ (velikost, mohutnost).

$$X \subseteq Y \Leftrightarrow (x \in X \Rightarrow x \in Y) \quad \forall x$$

$P(X)$: Potenční množina množiny X — množina všech podmnožin množiny X (včetně \emptyset a X). Je-li X konečná, $|P(X)| = 2^{|X|}$.

Symbolika: $|X \cap Y|$, $|X \cup Y|$, $|X \setminus Y|$, ...

Relace

Neuspořádaná dvojice: $\{x, y\}$

Uspořádaná dvojice: (x, y) : $(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow (x = x' \wedge y = y')$; např. $\{\{x\}, \{x, y\}\}$

Kartézský součin: $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, Y \in Y\}$

Relace R mezi X, Y : $R \subseteq X \times Y$

Relace R na X : $R \subseteq X \times X$

Značení: $(x, y) \in \mathbb{R}$: xRy (jde-li o binární relaci)

Definice:

Relace R na množině X je:

- **reflexivní:** $xRx \quad \forall x \in X : xRx$
- **symetrická:** $xRy \Rightarrow yRx \quad \forall x, y \in X$
- **tranzitivní:** $(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz \quad \forall x, y, z \in X$
- **ekvivalence:** reflexivní, symetrická, tranzitivní

Třídy ekvivalence

Určené prvkem x :

$$R[x] = \{y \in X, xRy\}$$

(díky symetrii platí i yRx).

Příklad:

$$X = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (2, 4), (4, 2)\}$$

$$R[1] = \{1\}$$

$$R[2] = R[4] = \{2, 4\}$$

Tvrzení:

- (i) $x \in R[x] \quad \forall x \in X$
- (ii) $R[x] = R[y] \vee R[x] \cap R[y] = \emptyset \quad \forall x, y \in X$

DŮKAZ:

- (i) Z reflexivity.
(ii) Nechť $x, y \in X$:
(1) Předpokládejme xRy :
 $R[x] \subseteq R[y]$: Mějme libovolné $z \in R[x]$, tedy $zRx \xrightarrow{\text{tranz.}} zRy$, to znamená $z \in R[y]$. *Q.E.D.*
 $R[y] \subseteq R[x]$ obdobně (symetrie).

$$R[x] = R[y]$$

- (2) Předpokládejme, že neplatí xRy :
Pro spor nechť $R[x] \cap R[y] \neq \emptyset$. Mějme libovolné $z \in R[x] \cap R[y]$. Pak jistě $xRz \wedge zRy \xrightarrow{\text{tranz.}} xRy$. \nexists *Spor*

$$R[x] \cap R[y] = \emptyset$$

Důsledek:

Množina (systém množin) $\{R[x] : x \in X\}$ tvoří tzv. **rozklad** množiny X . $\forall x \in X$ pak patří do právě jedné množiny z rozkladu.

Uspořádání

(Částečné) uspořádání: Relace na X , která je reflexivní, tranzitivní a *antisymetrická* ($xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y \quad \forall x, y \in X$).

Značení: \leq či \preceq

Příklady: (\mathbb{N}, \leq) , $(\mathbb{N}, |)$ (*dělí*), $(P(X), \subseteq)$

Lineární uspořádání: Takové uspořádání, že $xRy \vee yRx \quad \forall x, y \in X$.

Pozn.: $(P(X), \subseteq)$ je lineární, pokud $|X| \leq 1$.

Zobrazení

Definice:

Máme-li množiny X, Y , **zobrazení z X do Y** definujeme jako libovolnou relaci $f \subseteq X \times Y$, která splňuje předpoklad, že $\forall x \in X \exists! y \in Y$ takové, že xfy .

Značení: $f: X \rightarrow Y$, $f: x \mapsto y$, $f(x) = y$

Definice:

Máme-li $f: X \rightarrow Y$ a $g: Y \rightarrow Z$, **složené zobrazení** $g \circ f$ značí zobrazení $X \rightarrow Z$, definované předpisem:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in X$$

Poznámka:

$g \circ f$ je skutečné zobrazení z X do Z :

$$(g \circ f)(x) = \underbrace{g(f(x))}_{\exists! y} = \underbrace{g(y)}_{\exists! z} = z$$

Definice:

Říkáme, že zobrazení $f: X \rightarrow Y$ je:

- **prosté** (injekce $f: X \rightarrow Y$), pokud $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y) \quad \forall x, y \in X$.
- **na** (z X na Y) (surjekce $f: X \rightarrow Y$), pokud $\forall y \in Y \exists x \in X$ takové, že $f(x) = y$.
- **vzájemně jednoznačné** (bijekce $f: X \rightarrow Y$ či $f: X \xrightarrow{1-1} Y$), pokud je prosté a *na*.

Pro konečné množiny platí:

- prosté: $|X| \leq |Y|$
- *na*: $|X| \geq |Y|$
- bijekce: $|X| = |Y|$

Pozn.: Pojem **funkce** se používá ve významu “zobrazení” či “zobrazení do \mathbb{R} ”.

Kombinatorika

Permutace a faktoriál

Permutace konečné množiny X : Libovolná bijekce $\pi: X \xrightarrow{1-1} X$.

Příklad:

Mějme množinu $X = \{a, b, c, d\}$, definujme permutaci $\pi(a) = b$, $\pi(b) = d$, $\pi(c) = c$, $\pi(d) = a$. Matice permutace pak je

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & c & a \end{pmatrix},$$

permutace tvoří uspořádání

$$(b, d, c, a)$$

a dá se vyjádřit na grafu jako

$$\begin{array}{ccc} a * & \xrightarrow{\quad} & * b \\ & \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ | \setminus \\ | \quad \setminus \\ \text{---} \end{array} & \\ c * & \xleftarrow{\quad} & * d \\ & \begin{array}{c} \setminus \\ \text{---} \\ / \end{array} & \end{array}$$

n **faktoriál:** $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$, $0! = 1$

Tvrzení:

Počet permutací n -prvkové množiny je $n!$.

DŮKAZ:

n možností, kam se zobrazí první prvek.

$n - 1$ možností, kam se zobrazí druhý prvek.

...

VĚTA ():

$|X| = n$, $|Y| = k$. Pak existuje:

- k^n zobrazení $X \rightarrow Y$.
- $k(k-1)(k-2) \cdots (k-n+1)$ prostých zobrazení $X \rightarrow Y$.
- $k! = n!$ bijekcí $X \xrightarrow{1-1} Y$, pokud $k = n$.
- 0 bijekcí $X \xrightarrow{1-1} Y$, pokud $k \neq n$.

Kombinační čísla

Definice:

Kombinační číslo (neboli **binomický koeficient**):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1} \quad n, k \in \mathbb{N}_0, n \geq k$$

Alternativní definice:

$\binom{n}{k}$ je počet k -prvkových podmnožin n -prvkové množiny.

Tvrzení:

Obě definice jsou ekvivalentní.

DŮKAZ:

Nechť $|X| = n$. Pak počet uspořádaných k -tic různých prvků z X je kombinatorickou úvahou

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Zároveň však tento počet můžeme spočítat přes kombinační čísla jako (počet k -prvkových podmnožin X)(počet možných uspořádání) = $\binom{|X|}{k}k! = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Q.E.D.

Značení:

Bud' X množina. Pak $\binom{X}{k}$ je množina všech k -prvkových podmnožin množiny X . Navíc

$$\left| \binom{X}{k} \right| = \binom{|X|}{k}.$$

Platí:

(i) Symetrie:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad n \geq k \geq 0$$

DŮKAZ:

Z definice kombinačního čísla (algebraicky nebo doplňky).

(ii) Sousední čísla:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

DŮKAZ:

Z množinové definice kombinačního čísla:

$$\left| \binom{X}{k} \right| = \underbrace{\left| \binom{X \setminus \{x_n\}}{k-1} \right|}_{\text{počet } k\text{-prvkových podmnožin } X \text{ obs. } x_n} + \underbrace{\left| \binom{X \setminus \{x_n\}}{k} \right|}_{\text{počet } k\text{-prvkových podmnožin } X \text{ neobs. } x_n}$$

Q.E.D.

Pascalův trojúhelník

Ve vrcholu \triangle je 1, okraje jsou lemovány nulami, každý prvek je součtem dvou prvků nad ním.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 &
 \end{array}$$

Pohled přes kombinační čísla:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} \\
 & & & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} \\
 & & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
 \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & &
 \end{array}$$

neboť $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Binomická věta

Víme:

$$\begin{aligned}
 (x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\
 (x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3
 \end{aligned}$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

DŮKAZ:

Indukcí podle n :

(1) $n = 0, n = 1$

$$\begin{aligned}
 (x+y)^0 &= \binom{0}{0} x^0 y^0 = 1 \\
 (x+y)^1 &= \binom{1}{0} x^0 y^1 + \binom{1}{1} x^1 y^0
 \end{aligned}$$

(2) $n \Rightarrow n+1$

$$\begin{aligned}
 (x+y)^{n+1} &= (x+y)^n(x+y) = (x+y) \left(\binom{n}{0} x^0 y^n + \dots + \binom{n}{n} x^n y^0 \right) = \\
 &= \binom{n}{0} x^1 y^n + \dots + \binom{n}{n} x^{n+1} y^0 + \binom{n}{0} x^0 y^{n+1} + \dots + \binom{n}{n} x^n y^1 = \\
 &= \binom{n+1}{0} x^0 y^{n+1} + \binom{n+1}{1} x^1 y^n + \dots + \binom{n+1}{n} x^n y^1 + \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} y^0 = \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{(n+1)-k}
 \end{aligned}$$

Důsledek:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

Multinomická věta

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, \forall m \in \mathbb{N}, \forall x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R} :$$

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots, k_m \geq 0 \\ k_1 + k_2 + \dots + k_m = n}} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} (x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m})$$

Bez důkazu.

Poznámka:

Pro $m = 2$ odpovídá binomické větě.

Multinomický koeficient

$$\binom{n}{k_1, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}$$

Počet způsobů zařazení čísel $1, \dots, n$ do m množin x_1, \dots, x_m tak, aby $|x_1| = k_1, \dots, |x_m| = k_m$.

Platí

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k, n-k}$$

Příklad:

200 dětí, 3 autobusy (80, 70, 50), počet možností rozmístění

$$\binom{200}{80, 70, 50}$$

Odhady faktoriálů a kombinačních čísel

Faktoriály

Věta

$$n^{n/2} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

$$n^{n/2} = (\sqrt{n})^n$$

DŮKAZ:

$$(n!)^2 = \underbrace{(1 \cdot n)(2 \cdot (n-1)) \cdots (n \cdot 1)}_{\substack{(n! \text{ jednou popředu a} \\ k \text{ tomu podruhé odzadu)}}$$

$$(n!)^2 = z_1 \cdot z_2 \cdots z_{2n}$$

Z AG nerovnosti:

$$z \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

A protože

$$(i+1)(n-i) = n + i(n-1-i) \geq n$$

(pro $i = 0, 1, \dots, n-1 \Rightarrow (i \geq 0 \wedge (n-1-i) \geq 0)$), platí:

$$z \geq n$$

Tedy:

$$(n^n) \leq (n!)^2 \leq \left(\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\right)^n$$

$$n^{n/2} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

Q.E.D.

Přesněji

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}$$

$$\text{tj. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}} = 1$$

Bez důkazu.

Kombinační čísla

Můžeme přeformulovat jako odhad prostředního čísla v n -tém řádku Pascalova trojúhelníku.

Víme

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Protože součet je počet podmnožin n -prvkové množiny.

Alternativní výklad: Každá čísla v předcházejícím řádku přispějí $2 \times$ do dalšího řádku.

Zřejmě z první definice kombinačního čísla:

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \dots < \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} > \dots > \binom{n}{n}$$
$$\frac{2^n}{n+1} < \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} < 2^n$$

Přesněji:

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \approx \frac{2^n}{\sqrt{\pi n/2}}$$

Platí také:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{k} \leq \left(\frac{e \cdot n}{k}\right)^k$$

Bez důkazu. (Ve skriptech, nepovinný.)

Princip inkluze a exkluze (PIE)

Příklad:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

VĚTA (PIE):

Jsou-li A_1, A_2, \dots, A_n konečné množiny:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=1}^n \underbrace{(-1)^{k+1}}_{(\text{parita})} \cdot \sum_{I \in \binom{\{1, \dots, n\}}{k}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

(Ve vnořené sumě sčítáme přes všechny k -prvkové podmnožiny množiny $1..n$.)

DŮKAZ:

Nechť x je libovolný prvek z $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$. Pro $n = 1, n = 2$ viz diagramy množin, nakreslit si, kam který prvek přispívá: $+1 - 1 + 1 \dots$

Kolikrát je počítán x vlevo, kolikrát vpravo? Vlevo jednou — triviální.

Vpravo

Nechť j označuje počet množin A_i , do kterých patří x .

Příklad:

$$\begin{aligned} x &\in A_1, \dots, A_j \\ x &\notin A_{j+1}, \dots, A_n \end{aligned}$$

Pak platí:

$$\begin{aligned} \#x &= \binom{j}{1} - \binom{j}{2} + \binom{j}{3} - \dots + (-1)^{j-1} \binom{j}{j} \\ &= \sum_{i=1}^j (-1)^{i-1} \binom{j}{i} + 1 - 1 \end{aligned}$$

Obracíme znaménko a paritu:

$$\begin{aligned} &= 1 - \sum_{i=0}^j (-1)^i \binom{j}{i} \\ &= 1 - (-1 + 1)^j \\ &= 1 \end{aligned}$$

Q.E.D.

Příklad:

$$|X| = \{1, \dots, n\}, |Y| = \{1, \dots, l\}, n \geq l$$

Kolik existuje zobrazení z X na Y ?

Všech zobrazení z X do Y je l^n . Nechceme počítat ta, ve kterých se na nějaký prvek Y nezobrazuje žádný prvek z X :

$$\exists y \in Y : \forall x \in X, f(x) \neq y.$$

Pro všechna $i = 1, \dots, l$ platí:

$$A_i = \{j: X \rightarrow Y \mid \forall x \in X, f(x) \neq i\} = \{j: X \rightarrow Y - \{i\}\}$$

$$|A_i| = (l-1)^n$$

Pro $i_1 \neq i_2$:

$$A_{i_1} \cap A_{i_2} = \{f: X \rightarrow Y - \{i_1, i_2\}\}$$

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2}| = (l-2)^n$$

Pro $\{i_1, \dots, i_k\} \in \binom{\{1, \dots, l\}}{k}$:

$$A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} = \{f: X \rightarrow Y - \{i_1, \dots, i_k\}\}$$

$$|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = (l-k)^n$$

Počet zobrazení z X na Y je:

$$l^n - \left| \bigcup_{i=1}^l A_i \right| =$$

$$= l^n - \left(\binom{l}{1} (l-1)^n - \binom{l}{2} (l-2)^n + \binom{l}{3} (l-3)^n - \dots + \right.$$

$$\left. + (-1)^{l-2} \binom{l}{l-1} (l - (l-1)^n) + (-1)^{l-1} \binom{l}{l} (l-l)^n \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{l-1} (-1)^k \binom{l}{k} (l-k)^n$$

Vánoční besídka (šatnářka)

n dárců dostane nazpět n dárků. Každá z $n!$ možností je stejně pravděpodobná. Jaká je pravděpodobnost, že nikdo nedostane zpátky svůj dárek?

Matematická formulace

Hledáme $\frac{\check{s}(n)}{n!}$, $\check{s}(n)$ = počet permutací π množiny $\{1, \dots, n\}$ bez pevného bodu.

Pevný bod: i je pevný bod, pokud $\pi(i) = i$.

VĚTA (Šatnářka):

$$\check{s}(n) = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right)$$

Příklad:

$$\check{s}(1) = 1! \left(1 - \frac{1}{1!} \right) = 0$$

$$\check{s}(2) = 2! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \right) = 1$$

$$\check{s}(3) = 3! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right) = 2$$

DŮKAZ:

S_n = množina všech permutací $\{1, \dots, n\}$

$A_i = \{\pi \in S_n, i = 1, \dots, n : \pi(i) = i\}$

$|A_i| = (n-1)!$ (Prvek i stojí, ostatní se propermutují.)

Pro $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ platí:

$$\underbrace{\bigcap_{i \in I} A_i}_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}} = \text{množina všech permutací } \pi$$

množiny $\{1, \dots, n\}$ takových, že $\pi(i_1) = i_1, \dots, \pi(i_k) = i_k$.

$$|\bigcap_{i \in I} A_i| = (n-k)! \quad (t \text{ prvků stojí, ostatní se propermutují.})$$

$$\begin{aligned} \check{s}(n) &= |S_n| - \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \\ &= n! - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \cdot \sum_{I \in \binom{\{1, \dots, n\}}{k}} \underbrace{|\bigcap_{i \in I} A_i|}_{(n-k)!} \\ &= n! - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \cdot \underbrace{\binom{n}{k} (n-k)!}_{\frac{n!}{k!}} \\ &= n! \cdot \left(1 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \right) \end{aligned}$$

Q.E.D.

Tedy **pravděpodobnost**, že nikdo nedostane zpět svůj dárek, je:

$$\frac{\check{s}(n)}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots \pm \frac{1}{n!} \rightarrow \frac{1}{e} \approx 0.36787\dots$$

Grafy

Definice

Graf G je uspořádaná dvojice (V, E) , kde V je libovolná konečná množina (obecněji zcela libovolná) a $E \subseteq \binom{V}{2}$.

Úplný graf (na n vrcholech):

$$K_n = (V, \binom{V}{2})$$

Kružnice:

$$C_n = (\{v_1, \dots, v_n\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}\}) \quad n \geq 3$$

Cesta:

$$P_n = (\{v_0, \dots, v_n\}, \{\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}\})$$

Sled: $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_m, v_m$, kde $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$. (Cesta je tedy speciální druh sledu, kde jedním vrcholem neprojdeme vícekrát.)

Úplný bipartitní graf $K_{n,m} = (V, E)$

$$\begin{aligned} V &= \{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m\} \\ E &= \{\{u_i, v_j\} : i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m\} \\ |V| &= n + m, \quad |E| = n \cdot m \end{aligned}$$

Příklad:

$K_{2,3}$:

$$\begin{array}{c} *-\backslash * /-* \\ \backslash X X / \\ *-\wedge-* \end{array}$$

Bipartitní graf

Graf $G = (V, E)$ takový, že:

$$V = \underbrace{U \dot{\cup} W}_{\substack{V=U \cup W, \\ U \cap W = \emptyset}}$$

$$E \subseteq \{\{u, w\} : u \in U, w \in W\}$$

Isomorfismus

“Přejmenování vrcholů”

$G \mid G'$ (G, G' jsou **izomorfní**), pokud existuje bijekce $f: V(G) \xrightarrow{1-1} V(G')$ taková, že:

$$\{x, y\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(x), f(y)\} \in E(G')$$

Pozn.: Izomorfismus je ekvivalence (reflexivní, symetrická, tranzitivní).

Podgraf: Graf G' je **podgrafem** grafu G ($G' \subseteq G$), pokud $V(G') \subseteq V(G)$ a $E(G') \subseteq E(G)$.

Indukovaný podgraf

Graf G' je **indukovaným podgrafem** grafu G , pokud $V(G') \subseteq V(G)$ a $E(G') = E(G) \cap \binom{V(G')}{2}$.

Pozorování

Graf G na n vrcholech má 2^n indukovaných podgrafů (každá podmnožina V **indukuje** indukovaný podgraf).

Souvislý graf

Graf G je **souvislý**, pokud $\forall x, y \in V(G)$ existuje v G cesta z x do y : $x \sim_G y$. \sim_G je ekvivalence na množině $V(G)$.

DŮKAZ:

Reflexivita a symetrie je zřejmá.

Tranzitivita:

$$x \sim_G y \wedge y \sim_G z \Rightarrow \exists \text{ sled z } x \text{ do } z$$

Nejkratší sled z x do z je cesta $\Rightarrow x \sim_G z$.

Q.E.D.

Poznámka:

$$G \text{ souvislý} \Leftrightarrow \forall x, y \in V(G) \exists \text{ sled z } x \text{ do } y \text{ (v } G)$$

Komponenta grafu G

Podgraf indukovaný třídami ekvivalence \sim_G .

Pozn.: G souvislý \Leftrightarrow má jednu komponentu.

Vzdálenost v grafu

$x, y \in V(G)$, $d_G(x, y)$ = vzdálenost x, y v G = délka nejkratší cesty z x do y

Poznámka:

$d_G(x, y)$ má vlastnosti metriky (vzdálenosti):

$$d_G(x, y) \geq 0$$

$$d_G(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$d_G(x, y) = d_G(y, x)$$

$$d_G(x, y) + d_G(y, z) \geq d_G(x, z)$$

Sousedí v grafu: y je souseď x v G , pokud $\{x, y\} \in E(G)$ ($\Leftrightarrow d_G(x, y) = 1$).

Matice sousednosti:

$$G = (\{v_1, \dots, v_n\}, E) : A_G = (a_{i,j})_{i,j=1}^n, a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \{v_i, v_j\} \in E(G) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Stupeň vrcholu: Stupeň vrcholu x v G jest $\deg_G(x) = \deg(x)$ = počet hran obsahujících x = počet susedů.

Věta o sudosti (princip sudosti)

$$\forall G = (V, E) : \sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|$$

DŮKAZ:

Vlevo každá hrana přispěje $2 \times$.
Q.E.D.

Důsledek:

$\forall G$: počet vrcholu každého stupně je sudý.

Poznámka:

Neplatí pro nekonečné grafy (o-o-o-o-...).

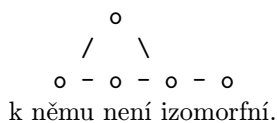
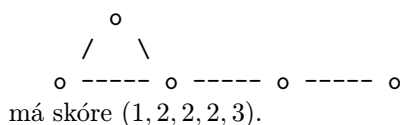


Skóre grafu

$$G = (\{v_1, \dots, v_n\}, E), \text{ skóre grafu } \mathbf{G} = D(G) = (\deg_G(v_1), \dots, \deg_G(v_n))$$

Dvě skóre považujeme za stejná, pokud se liší pouze pořadím prvků.

Příklad:



Věta o skóre:

$$D = (d_1, \dots, d_n, 0 \leq d_1 \leq \dots \leq d_n)$$

D je skóre nějakého grafu, právě když

$$D' = (d_1, \dots, d_{n-d_n-1}, d_{n-d_n} - 1, \dots, d_{n-2} - 1, d_{n-1} - 1)$$

je skóre nějakého grafu.

Příklady použití:

Je (1, 2, 3, 3, 3, 4, 4) skóre nějakého grafu?
 (1, 2, 2, 2, 2, 3) skóre nějakého grafu?

$$(1, 2, 1, 1, 1)$$

$$(1, 1, 1, 1, 2)$$

$$(1, 1, 0, 0) \Leftrightarrow (0, 0, 1, 1)$$

$$(0, 0, 0)$$

je skóre grafu.

Je $(1, 1, 1, 2)$?

$$(1, 0, 0)$$

$$(0, 0, 1)$$

$$(0, -1)$$

není.

Je $(0, 1, 2, 3, 4, 4)$?

$$(0, 0, 1, 2, 3)$$

$$(0, -1, 0, 1)$$

DŮKAZ:

“ \Leftarrow ”

G' má skóre D' . Přidáme ke G' nový vrchol v_n a spojíme ho hranou s vrcholy v_{n-1} , v_{n-2} , \dots , v_{n-d_n} . Dostáváme tak graf se skóre D .

“ \Rightarrow ”

Předpokládáme, že $G = (\{v_1, \dots, v_n\}, E)$ má skóre D . Označme $d = d_n = \deg v_n$.

První případ: Z v_n vedou hrany do vrcholů $v_{n-1}, v_{n-2}, \dots, v_{n-d}$. Odstraněním v_n pak z těchto hran dostaneme graf se skóre D' .

Druhý případ: Neplatí první případ, tedy potom je vrchol v_n propojen s jinými vrcholy, než je posledních d_n , neboli:

$$i < n - d \leq j : \{v_i, v_n\} \in E, \{v_j, v_n\} \notin E$$

Ale protože $\deg v_i (= d_i) \leq \deg v_j (= d_j)$, existuje v_k ($k \neq i, j$) takový, že $\{v_j, v_k\} \in E$, $\{v_i, v_k\} \notin E$ (tedy existuje zase nějaký vrchol v_k takový, který je spojený s v_j , ale ne v_i a tím se stupeň kompenzuje).

Přidáme do E hrany $\{v_i, v_k\}$, $\{v_j, v_n\}$, odebereme z E hrany $\{v_i, v_n\}$, $\{v_j, v_k\}$. Skóre tak zůstává D , ale zmizela neposedná hrana mimo posledních d_n prvků (vrcholy v_i, v_j jsme místo přes v_n spojili přes v_k). Převodli jsme tedy situaci na první případ.

Q.E.D.

Kreslení grafu jedním tahem

Sled: $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n$; $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$

Tah: Sled, $e_i \neq e_j$ (pro $i \neq j$)

Uzavřený tah: Tah, $v_0 = v_m$

“Cesta”: Tah, $v_i \neq v_j$

Eulerovský graf

$G = (V, E)$ je **Eulerovský** (lze nakreslit jedním uzavřeným tahem), pokud existuje uzavřený tah $v_0, e_1, \dots, e_m, v_m$ takový, že:

$$\forall e \in E \exists ! i : e = e_i \wedge \forall v \in V \exists i : v = v_i$$

VĚTA ():

G je eulerovský graf, právě když je G souvislý a všechny stupně jsou sudé.

DŮKAZ:

“ \Rightarrow ”

Uzavřený eulerovský tah dává **souvislost** (mezi každými 2 vrcholy existuje tah, tedy i sled) i **sudé stupně** ($\deg v = 2|\{i \in \{1, \dots, m\} : v = v_i\}|$).

“ \Leftarrow ”

Pozorování: Pokud jsou všechny stupně sudé, každou hranou vede uzavřený tah.

Důkaz: Nejdější tah danou hranou je nutně uzavřený. *Q.E.D.*

$G = (V, E)$ souvislý, všechny stupně sudé. Ukážeme (sporem), že nejdější uzavřený tah T v G je eulerovský.

Co by bylo, kdyby nebyl: Ze souvislosti víme, že existuje $v \in V(T)$, $e \in E \setminus E(T)$, $v \in e$. V grafu $G' = (V, E \setminus E(T))$ jsou všechny stupně sudé, tedy v G' existuje uzavřený tah T' , obsahující e .

Ve vrcholu v propojíme T, T' do jednoho tahu. Schematicky: **T-O-D-O:** Fig. D0

\Rightarrow nový delší tah, ale T měl být nejdější!

‡ *Spor*

Operace (lokální úpravy) na grafech

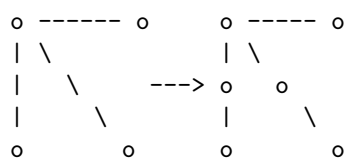
Definujeme si $G = (V, E)$.

- (i) Odebrání hrany $e \in E$: $G \rightarrow G - e = (V, E \setminus \{e\})$.
- (ii) Přidání hrany $e \in \binom{V}{2} \setminus E$: $G \rightarrow G + e = (V, E \cup \{e\})$.
- (iii) Odebrání vrcholu $v \in V$: $G \rightarrow G - v = (V \setminus \{v\}, \{e \in E, v \notin e\})$.
- (iv) Dělení hrany $e = \{x, y\} \in E$:

$$G \rightarrow G \% e = (V \cup \{z\}, (E \setminus \{e\}) \cup \{\{x, z\}, \{y, z\}\})$$

G' je dělení grafu G , pokud: G' dostaneme z G postupným opakováním operace dělení hrany. Ekvivalentně — G' dostaneme z G nahrazením hran cestami délek ≥ 1 .

Příklad:

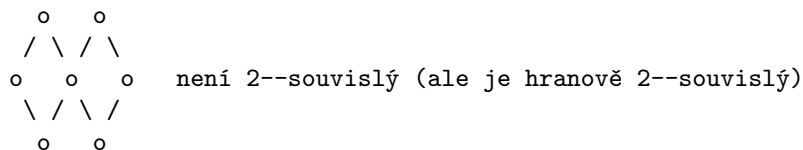
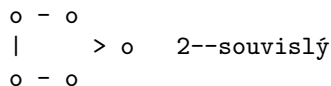


2-souvislost

Definice:

Graf $G = (V, E)$ je (**vrcholově**) **2-souvislý**, pokud $|V| \geq 3$ a $G - v$ je souvislý pro $\forall v \in V$.

Příklad:

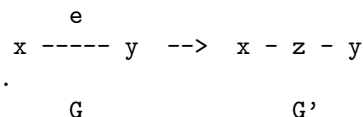


Pozorování:

$$G \text{ je 2-souvislý} \Rightarrow \begin{cases} G + e & \text{2-souvislý pro } \forall e \notin E. \\ G - e & \text{souvislý pro } \forall e \in E. \\ G \% e & \text{2-souvislý pro } \forall e \in E. \end{cases}$$

DŮKAZ:

- (a) zřejmé
- (b) $e = \{x, y\} \in E$
 $G - x$ souvislý $\Rightarrow y$ je v $G - e$ v jedné komponentě se všemi vrcholy $v \neq x, y$.
 $G - y$ souvislý $\Rightarrow x$ je v $G - e$ v jedné komponentě se všemi vrcholy $v \neq x, y$.
Tedy $G - e$ má určitě jednu komponentu, takže je souvislý.
- (c)



$G' - v$ souvislý $\forall v \neq z$. $G' - z = G - e$ souvislý podle (b).
Q.E.D.

Definice:

Grafy $G = (V, E)$ je **hranově 2-souvislý**, pokud G je souvislý a $G - e$ je souvislý pro $\forall e \in E$.

VĚTA ():

G je 2-souvislý $\Leftrightarrow G$ vznikne z $K_3 = \Delta$ postupným přidáváním a dělením hran.
T-O-D-O: Obrázek úplného trojúhelníčku s vrcholem uprostřed a jeho odvození z trojúhelníčku.

DŮKAZ:

“ \Rightarrow ”

Δ je 2-souvislý, přidávání a dělení hran uchovává 2-souvislost.

“ \Leftarrow ”

Nebudeme dělat.

Q.E.D.

VĚTA ():

V 2-souvislém grafu leží každé 2 vrcholy na společné kružnici.

DŮKAZ:

Podle předchozí věty stačí dokázat:

- (i) Věta platí pro Δ . Triviální.
- (ii) Věta platí pro $G \Rightarrow$ platí i pro $G + e$ (triviální).
- (iii) Věta platí pro $G \Rightarrow$ platí i pro $G \% e$:
Nechť $u \in V(G)$, $z \in V(G') \setminus V(G)$ (vytvořený na $e = (x, y)$). Leží u, z na společné kružnici? (Ostatní případy jsou triviální.)
 $C =$ kružnice v G společná pro x, u .
 - (1) $y \in C$ — **T-O-D-O:** Obrázek D1
 - (2) $y \notin C$ — **T-O-D-O:** Obrázek D2
 $P =$ nejkratší cesta z y do $V(C)$ v $G - x$. Pak nová kružnice vede z x přes z do y , pak po P až k nějakému vrcholu C a poté po C až zpět k x .

Poznámka:

V 2-souvislém grafu též každé 2 hrany leží na společné kružnici. (Bez důkazu).

Předpokládám P_1, P_2 různé cesty z x do y :

$$P_1 = xe_1v_1e_2v_2 \cdots y$$

$$P_2 = xe'_1v'_1e'_2v'_2 \cdots y$$

Nechť i je minimální, pro které platí $e_i \neq e'_i$.

Nechť $j \geq i$ je minimální, pro které $\exists k$ takové, že $v'_j = v_k$.

Pak $v_{i-1} = v'_{i-1}, v'_i, \dots, v'_j = v_k, v_{k-1}, \dots, v_i$ tvoří kružnici.

‡ *Spor*

(ii) \Rightarrow (iii)

$$e = \{x, y\}$$

$G - e$ není souvislý, jinak by existovaly dvě cesty z x do y (jedna v $G - e$, druhá e).

(iii) \Rightarrow (iv)

Tvrdíme, že G nemá kružnici. Pro spor tedy předpokládejme, že kružnici má. Potom vynecháním libovolné hrany kružnice se neporuší souvislost. To je ale spor s (iii).

$G + e$ ($e = \{x, y\}$) má kružnici: G je souvislý, tedy existuje cesta z x do y v G a přímá hrana dotvoří kružnici.

(iv) \Rightarrow (i)

G souvislý: $x, y \in V$, existuje cesta z x do y v G ?

(a) $\{x, y\} \in E$: platí

(b) $\{x, y\} \notin E$: $G + \{x, y\}$ má kružnici, která nebyla v G , tedy nutně prochází hranou $\{x, y\}$. Ostatní hrany kružnice tvoří cestu z x do y v G .

(i) \Rightarrow (v)

$|V| = |E| + 1$: z předchozího důsledku.

Odebráním listu odebereme právě jednu hranu, platnost rovnice se tedy nemění.

Opakováním dostaneme jednovrcholový strom $K_1 = \bullet$, pro ten rovnice platí.

(v) \Rightarrow (i)

$G = (V, E)$ souvislý, $|V| = |E| + 1$.

G nemá kružnici: nechť G má kružnici; odebereme jednu její hranu, neporušíme souvislost. Má-li stále ještě nějakou kružnici, opět z ní odebereme hranu. To opakujeme, až dostaneme graf $G' = (V, E')$ souvislý bez kružnic (tedy strom $|V| = |E'| + 1$), $|E'| < |E|$. Ale předpoklad zněl, že $|V| = |E| + 1$.

‡ *Spor*

Minimální kostra grafu

Kostra grafu

Kostra souvislého grafu $G = (V, E)$ je libovolný strom $T = (V, E')$, kde $E' \leq E$.

Poznámka:

Každý souvislý graf má kostru: dokud v G existuje kružnice, odebíráme z G hranu kružnice, dostaneme tak nakonec kostru grafu.

Příklad:

Prasátko. (Na onom grafu se vysvětluje i minimální kostra.)

Graf s ohodnocenými hranami: $G = (V, E), w: E \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Problém minimální kostry:

Pro daný souvislý graf $G = (V, E), w: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ máme nalézt **minimální kostru**, tj. kostru $K = (V, E')$ takovou, že její váha $w(K) = w(E') = \sum_{e \in E'} w(e)$ je minimální.

Kruskulův (hladový) algoritmus

Mějme souvislý $G = (V, E), w: E \rightarrow \mathbb{R}^+$. Předpokládejme, že $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, přičemž

$$w(e_1) \leq w(e_2) \leq \dots \leq w(e_m)$$

1. $E_0 = \emptyset$
2. Pro $i = 1, 2, \dots, m$ pokládáme

$$E_i = \begin{cases} E_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{pokud } (V, E_{i-1} \cup \{e_i\}) \text{ nemá kružnici} \\ E_{i-1} & \text{jinak} \end{cases}$$

3. $(V, E_m) \rightarrow$ výstup (minimální kostra)

VĚTA (kostra nalezená algoritmem je minimální):

DŮKAZ:

(V, K) nechť je výsledná kostra. Budiž (V, L) libovolná jiná kostra, pak chceme $w(L) \geq w(K)$. Indukcí podle $d = |K \Delta L| = |(K \setminus L) \cup (L \setminus K)|$:

mohutnost **symetrické diference**

$(d = 0)$ $K = L$, platí

$(d > 0)$ Předpokládáme, že tvrzení platí pro všechny menší hodnoty d .

$$d > 0 \implies K \neq L, |K| = |L| \implies \exists e \in L \setminus K$$

$(V, L \setminus \{e\})$ pak má dvě komponenty (graf s hranou byl strom). Obrázek.

(V, K) kostra $\implies (V, K \cup \{e\})$ má (jedinou) kružnici C obsahující e . Existuje $e' \neq e \in C$:

$$|e' \cap V_1| = 1$$

$$|e' \cap V_2| = 1$$

Tvrdíme:

$$w(e') \leq w(e)$$

(jinak $w(e) < w(e')$, algoritmus tedy uvažoval e dříve než e' , ovšem pokud ho nezařadil, mohl ho odmítnout jedině kvůli C (to je jediná kružnice v $K \cup e$), ale $e' \in C$ nebylo ještě uvažováno).

$$L' = (L \setminus \{e\}) \cup \{e'\}$$

Tvrdíme, že (V, L') je kostra. (Viz náš virtuální obrázek. Měli jsme dvě komponenty spojené hranou e , teď je jen spojíme místo toho jinou hranou e' .)

$$|L' \Delta K| < |L \Delta K|$$

$$w(L) \geq w(L') \stackrel{\text{ind. předp.}}{\geq} w(K)$$

Q.E.D.

Jarníkův algoritmus na minimální kostru

1. $V_0 := \{v\}$, kde v je libovolný vrchol z V .
2. Pro $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ($n = |V|$) nechť e_i je hrana minimální váhy vedoucí z V_{i-1} do $V \setminus V_{i-1}$.
Obrázek.
 $V_i = V_{i-1} \cup e_i$ (přidáme koncový vrchol hrany e_i).
3. $\text{strom}(V, \{e_1, \dots, e_{n-1}\})$ je výstup (minimální kostra grafu).

Borůvkův algoritmus

Předpokládáme, že libovolné dvě hrany mají různou váhu: $w(e) \neq w(e') \forall e \neq e'$.

1. Spojíme každý vrchol hranou s nejbližším sousedem: (obrázek).
2. Spojme každou komponentu hranou s nejbližší jinou komponentou: (obrázek).
Opakujeme, dokud nedostaneme jednu komponentu — to je výstup.

Rovinné grafy

Oblouk: Množina bodů $\{\gamma(x) : x \in [0, 1]\}$, přičemž $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ (rovina) je prosté a spojitě zobrazení.

Definice:

Graf $G = (V, E)$ je **rovinný**, má-li **rovinné nakreslení**:

Vrcholy odpovídají různým bodům v \mathbb{R}^2 , hrany odpovídají obloukům spojujícím příslušné dvojice vrcholů tak, že mají-li dva oblouky společný bod, potom je tento bod pro oba oblouky koncový.

Příklady:

- (i) K_4 je rovinný
- (ii) C_n je rovinná
- (iii) Libovolný strom

Je známo: Každý rovinný graf má rovinné nakreslení, v němž hrany odpovídají úsečkám. (Důkaz těžký.)

Definice:

Stěny rovinného nakreslení: Maximální souvislé oblasti množiny $\mathbb{R}^2 \setminus X$, kde X je množina bodů ležících na obloucích nakreslení. (Souvislost bereme intuitivně.)

Příklad:

Vezmeme-li K_4 , pak stěny jsou vlastně všechny oblasti mezi úsečkami i kolem celého grafu (má tedy 4 stěny).

Vnější stěna: Jedna neomezená stěna, která existuje pro každý rovinný graf.

Vnitřní stěny: Ostatní stěny.

Definice:

Topologická kružnice: Uzavřený "oblouk" (tj. $\gamma(0) = \gamma(1)$).

Příklad:

Obrázky. (Šneci a měňavky. ;-)

VĚTA (Jordanova věta o kružnici):

Libovolná topologická kružnice rozděljuje rovinu na dvě souvislé oblasti (**vnitřek** a **vnějšek** dané kružnice).

(Důkaz těžký.)

VĚTA (Nerovinnost K_5):

Graf K_5 není rovinný.

DŮKAZ:

Sporem. Nechť $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Obrázek: vezměme si vrcholy 1, 2, 3 a hrany mezi nimi. Ty vytvoří topologickou kružnici K .

(a) v_4 leží uvnitř K :

Pak ho umístíme do středu, ale pak kam s vrcholem V_5 ? Žádná stěna nemá na hranici všechny vrcholy 1, 2, 3, 4.

(b) v_4 leží vně K :

Můžeme převést na isomorfní graf s v_4 uvnitř.

Q.E.D.

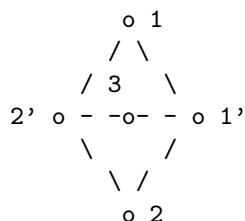
VĚTA (Nerovinnost $K_{3,3}$):

Graf $K_{3,3}$ (úplný bipartitní graf o $3 + 3$ vrcholech) není rovinný.

DŮKAZ:

$$V = \{1, 2, 3, 1', 2', 3'\}$$

Spousta obrázků.



Kam s $3'$?

Q.E.D.

Pozorování:

G rovinný \Leftrightarrow každé dělení G je rovinné.

DŮKAZ:

Obrázkem K_4 . Libovolně rozdělíme hrany, ale tím se nám nijak nezmění rovinnost.

VĚTA (Kuratowski):

G je rovinný $\Leftrightarrow G$ neobsahuje dělení K_5 ani dělení $K_{3,3}$.

DŮKAZ:

“ \Rightarrow ”

Zřejmá.

“ \Leftarrow ”

Těžká.

Q.E.D.

Eulerův vztah

G souvislý rovinný graf, $|V| \geq 1$, s = počet stěn nějakého rovinného nakreslení G . Potom

$$|V| - |E| + s = 2$$

(Tudíž počet stěn nezávisí na volbě nakreslení.)

DŮKAZ:

Indukcí podle $|E|$:

(1) $|E| = 0$: $s = 1$, $|V| = 1$ (kvůli souvislosti), $1 - 0 + 1 = 2$.

(2) $|E| \geq 1$:

(a) G neobsahuje kružnici: G je strom.

Tedy $|V| = |E| + 1$, $s = 1$, tedy platí.

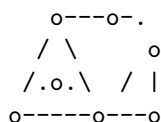
- (b) G obsahuje kružnici C :
 e buď libovolná hrana na C . $G - e$ splňuje Eulerův vztah (indukční předpoklad),
 má o hranu a stěnu méně, tedy G splňuje Eulerův vztah.

Q.E.D.

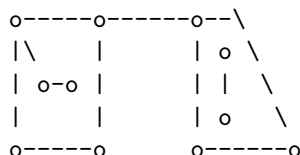
Tvrzení:

G buď rovinný, 2-souvislý. Pak hranice libovolné stěny v libovolném nakreslení G odpovídá kružnici v G .

Příklad:



Ale ne:



DŮKAZ:

Stačí ukázat, že tvrzení:

- (i) platí pro trojúhelník
 - (ii) nepřestane platit podrozdělením nebo přidáním hrany
- Jednoduše z obrázku.

Tvrzení:

$G = (V, E)$ rovinný graf, $|V| \geq 3$. Potom:

- (i) $|E| \leq 3|V| - 6$
- (ii) G neobsahuje $\Delta \Rightarrow |E| \leq 2|V| - 4$

DŮKAZ:

- (i) Přidáváme hrany, dokud nedostaneme nějaký maximální rovinný graf, pro který platí, že po přidání jakékoliv hrany do něj již získáme graf, který není rovinný. Takový graf určitě bude 2-souvislý.

Souvislý bude, poněvadž kdyby měl více komponent, určitě bychom mohli přidat nějakou hranu, kterou komponenty spojíme, a tím by nebyla narušena rovinnost.

2-souvislý bude, jinak můžeme přidat hranu, která podruhé spojí nějaké dvě komponenty.

Každá stěna odpovídá kružnici, dokonce trojúhelníku: (obrázek) — každou kružnici můžeme rozkouskovat na trojúhelníky tak, že stále budeme mít rovinné zobrazení.

Počet incidentních dvojic hrana—stěna = $3s = 2|E|$:

$$3s = 2|E|$$

$$3|E| = 3|V| + 3s - 6 \quad (\text{Eulerův vzorec})$$

$$|E| = 3|V| - 6$$

To platí pro každý maximální rovinný graf (rovinná triangulace).

(ii)

Pozor!

Tento důkaz **nefunguje** — proti (a) lze najít triviální protipříklad. Opravy budu konzultovat s doc. Valtrem (asi půjde o moji chybu při přepisování), pokud potřebujete tvrzení umět dokázat teď, zkuste vymyslet důkaz (bez záruky!), jehož idea je:

Využijme (i) — to platí pro maximálně pro triangulovaný graf, odstraňme z něj tedy trojúhelníky. Trojúhelníků je právě tolik co stěn, tedy $2/3|E|$. Vyberme z množiny stěn disjunktní dvojice sousedních trojúhelníků a ty spojme — tím, že odstraníme hrany, které je rozdělují. Zbyde nám polovina stěn, žádná z nich nebude trojúhelník (a rozmysleme si, že každý hustší graf už trojúhelník obsahuje). Polovina znamená $1/3|E|$, odebrali jsme tedy třetinu stěn. To je dle (i) $|V| - 2$, tedy pro náš nový graf bez trojúhelníků $|E| \leq 2|V| - 4$. *Q.E.D.*

Připomínám, že toto je pouze idea, a to bez záruky. Také tento důkaz není proveden dvojným počítáním. Hodí se tedy zejména pro nouzové případy, kdy nevíte, kudy kam ;-).

Následuje původní (rozbitý) důkaz:

(a) Výsledný graf není 2-souvislý: pak to musí být hvězda.

Pokud můžeme přidat hranu, byl nesouvislý a spojili jsme dvě komponenty, tím trojúhelník určitě nevytvoříme. Pokud byl souvislý (ale ne 2-souvislý), každá hrana již nutně vytváří trojúhelník (**nevytváří!**).

Hvězda:

$$|E| = |V| - 1 \leq 2|V| - 4$$

(b) Výsledný graf je 2-souvislý.

Každá stěna je ohraničena kružnicí délky ≥ 4 Počet incidenčních dvojic hrana—stěna = $2|E| \geq 4s$:

$$2s \leq |E|$$

$$2|E| = 2|V| + 2s - 4$$

$$|E| \leq 2|V| - 4$$

Důsledky

(1) K_5 ani $K_{3,3}$ nejsou rovinné.

$$K_5 : z(i) = 10 \not\leq 3 \cdot 5 - 6$$

$$K_{3,3} : z(i) = 9 \not\leq 2 \cdot 6 - 4$$

(2) Každý rovinný graf má alespoň jeden vrchol stupně nejvýše 5.

Sporem: Kdyby všechny vrcholy byly stupně alespoň 6 \Rightarrow

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg v \geq 6|V|$$

(spor s (i)).

Barvení map a grafů

Politická mapa (obrázek).

Tři barvy obecně nestačí.

Předpoklady

- (1) Každý stát je souvislý.
- (2) Státy sousedící pouze v jednotlivých bodech nebudeme považovat za sousední.

Problém čtyř barev

Stačí čtyři barvy na obarvení libovolné politické mapy?

Ano, ale důkaz je extrémně těžký.

Definice:

$G = (V, E)$ lze (řádne) **obarvit** k barvami, pokud existuje zobrazení $b: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ takové, že $\{x, y\} \in E \Rightarrow b(x) \neq b(y)$.

Definice:

Barevnost grafu $G = \chi(G) = \min\{k : G \text{ lze obarvit } k \text{ barvami}\}$.

Příklady:

- (i) $\chi(C_{2k}) = 2$
- (ii) $\chi(C_{2k+1}) = 3$
- (iii) $\chi(K_n) = n$
- (iv) $\chi(K_{m,n}) = 2$ ($m, n \geq 1$)
- (v) $\chi(T) = 2$ (T strom na ≥ 2 vrcholech)

Vztah mezi barvením map a rovinných grafů

(náznak)

V každém státě vybereme za vrchol hlavní město, pospojujeme hranami hlavní města sousedních států, jistě to lze udělat tak, že graf, který dostaneme, je rovinný.

Řekneme, že mapa je k -obarvitelná \Leftrightarrow rovinný graf je k -obarvitelný.

Problém čtyř barev II.

Jiná formulace:

$\chi(G) \leq 4$ pro každý rovinný graf G ?

VĚTA (o pěti barvách):

$\chi(G) \leq 5$ pro každý rovinný graf $G = (V, E)$.

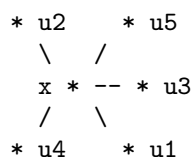
DŮKAZ:

Indukcí podle $|V|$:

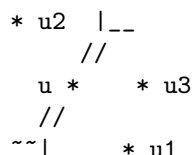
- (1) $|V| \leq 5$: zřejmé.
- (2) $|G|$ rovinný, $|V| \geq 6$ a předpokládáme, že věta platí pro rovinné grafy s menším počtem vrcholů.
 G má vrchol x , $\deg x \leq 5$ (Eulerův vztah).

- (a) $\deg x \leq 4$: Obarvíme $G - x$ pěti barvami podle indukčního předpokladu, poté dobarvíme x barvou, která se nevyskytuje na jeho sousedech.

- (b) $\deg x = 5$: Necht' sousedé jsou označeni u_1, \dots, u_5 . G je rovinný, tudíž neobsahuje podgraf K_5 — to ale znamená, že nemůžou být všichni sousedé vzájemně pospojováni hranami. Bez újmy na obecnosti necht' např. $\{u_4, u_5\} \notin E$.



V grafu $G - x$ ztotožníme u_4 a u_5 (tím nám nevznikne žádné křížení):



Podle indukčního předpokladu existuje obarvení b_0 pěti barvami. Obarvení $G - x$ pak můžeme definovat jako:

$$\begin{aligned}
 b(v) &:= b_0(v) & v \neq u_4, u_5 \\
 b(u_4) &= b(u_5) := b_0(u)
 \end{aligned}$$

Dobavíme vrchol x barvou různou od $b(u_1), b(u_2), b(u_3), b(u_4) = b(u_5)$.

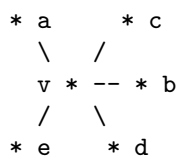
Q.E.D.

Pozor: Důkaz neprobíhá tak, že vezmu rovinný graf a přidám vrchol. Naopak vezmu libovolný graf, o kterém pouze vím, že libovolný menší graf je rovinný.

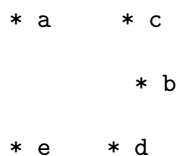
Alternativní důkaz:

Indukcí podle $|V|$:

- (1) $|V| \leq 5$: zřejmé.
- (2) $|V| \geq 6$: Necht' v je vrchol nejmenšího stupně. Dle Eulerova formule $\Rightarrow \deg v \leq 5$. $G - v$ lze obarvit pěti barvami (dle ind. předpokladu).



Vrchol v vyhodíme:



Bez újmy na obecnosti: a, b, c, d, e mají různou barvu.

$$\begin{aligned}
 f(a) &= \text{modrá} \\
 f(b) &= \text{červená} \\
 f(c) &= \text{žlutá} \\
 f(d) &= \text{zelená}
 \end{aligned}$$

Neexistuje žluto–zelená cesta z c do d nebo neexistuje modro–červená cesta z a do b .

Pokud by existovaly, musely by se křížit — buď mimo vrchol (to nesmějí) nebo ve vrcholu (ale jak ho pak obarvit?).

Bez újmy na obecnosti nechť neexistuje cesta $c \sim d$.

Přebarvíme barvy v žluto–zelené komponentě obsahující d (prohodíme žlutou a zelenou). I toto obarvení je korektní, neboť komponenta je maximální a její sousedé mají všichni jiné barvy.

Teď má ale c a d stejnou barvu, takže v můžeme obarvit barvou nevyskytující se na sousedech.

⟨písnička⟩

Q.E.D.

Počítání dvěma způsoby

Princip sudosti

$$\forall G = (V, E) : \sum_{v \in V} \deg v = 2|E|$$

DŮKAZ:

Dvojím způsobem spočítáme počet dvojic (v, e) , kde $v \in V$, $e \in E$, $v \in e$. — jednou podle vrcholů a pak podle hran.

$$\sum_{v \in V} \deg v = \sum_{e \in E} \underbrace{2}_{2|E|}$$

Q.E.D.

Nezávislý systém množin

Definice:

Mějme množinu X , $M \subseteq P(X)$ nazýváme **nezávislý systém množin**, pokud

$$\forall A, B \in M : A \neq B \Rightarrow A \not\subseteq B$$

VĚTA (Spernerova):

X buď množina velikosti n . Potom maximální velikost nezávislého systému množin $M \subseteq P(X)$ je rovna $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ (např. v Pascalově Δ je to v řádku, jehož součet je 2^n , největší číslo).

Příklady:

(i) $n = 3$:

$$X = \{1, 2, 3\}$$

$$M_1 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$$

$$M_2 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$$

jsou nezávislé systémy množin velikosti

$$\binom{3}{1} = 3$$

(ii) obecné n :

$M :=$ množina $\lfloor n/2 \rfloor$ -prvkových podmnožin množiny $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Pak M bude nezávislý systém velikosti $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

DŮKAZ:

(1) Maximální velikost $\geq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$: z předchozího příkladu.

(2) Maximální velikost $\leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$:

X, M podle předpokladů.

Maximální řetězec: $R = \{0, \{x_1\}, \{x_1, x_2\}, \dots, \underbrace{\{x_1, x_2, \dots, x_n\}}_X\}$ kde $x_1, \dots,$

x_n je libovolná permutace prvků X . Maximálních řetězců je $n!$, navíc kdykoliv si

vezmeme libovolné dvě množiny z maximálního řetězce, jedna bude vždy podmnožinou druhé.

Spočítáme dvěma způsoby počet dvojic (R, \mathcal{M}) takových, že $\mathcal{M} \in R$. R buď maximální řetězec, \mathcal{M} pak množina z M .

Tento počet je:

$$(a) \leq (\#\text{maximálních řetězců}) = n!$$

Kdyby do jednoho R patřily dvě \mathcal{M} , nepatřily by obě do nezávislého systému množin.

$$(b) = \sum_{\mathcal{M} \in M} \underbrace{|\mathcal{M}|!(n - |\mathcal{M}|)!}_{\# \text{ max. řetězců obsahujících } \mathcal{M}}.$$

Tedy:

$$n! \geq \sum_{\mathcal{M} \in M} |\mathcal{M}|!(n - |\mathcal{M}|)!$$

$$1 \geq \sum_{\mathcal{M} \in M} \frac{|\mathcal{M}|!(n - |\mathcal{M}|)!}{n!} = \sum_{\mathcal{M} \in M} \frac{1}{\binom{n}{|\mathcal{M}|}} \geq \sum_{\mathcal{M} \in M} \frac{1}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} = |M| \frac{1}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}$$

$$|M| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Q.E.D.

Grafy bez $K_{2,2}$ (C_4)

VĚTA (o počtu hran na n vrcholech):

Nechť $G = (V, E)$ je graf na n vrcholech neobsahující $K_{2,2}$. Potom

$$|E| \leq \frac{n\sqrt{n} + n}{2}$$

DŮKAZ:

Využijeme **Cauchy-Schwarzovu nerovnost**:

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

pro libovolné $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$.

Počítáme dvěma způsoby počet podgrafů (cest) $u - v - u'$. Tento počet je:

$$(a) \leq \binom{n}{2}: \text{ pro } \forall u, u' \in V, u \neq u' \text{ existuje nejvýše jeden } v \in V \text{ takový, že } \{u, v\}, \{u', v\} \in E \text{ — jinak dostaneme } K_{2,2}:$$

$$\begin{array}{c} * - * \text{ u} \\ \text{X} \\ * - * \text{ u}' \end{array}$$

$$(b) = \sum_{v \in V} \binom{\deg v}{2}: \text{ pro } \forall v \in V \text{ máme právě } \binom{\deg v}{2} \text{ vidliček } * - v - *.$$

Tedy:

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V} \binom{\deg v}{2} &\leq \binom{n}{2} \leq \frac{1}{2}n^2 \\ \frac{1}{2} \sum_{v \in V} ((\deg v) - 1)^2 &\leq \sum_{v \in V} \binom{\deg v}{2} \leq \frac{1}{2}n^2 \\ \underbrace{\sum_{v \in V} ((\deg v) - 1) \cdot 1}_{2|E| - n} &\leq \underbrace{\sqrt{\sum_{v \in V} ((\deg v) - 1)^2}}_{\leq \sqrt{n^2}} \cdot \underbrace{\sqrt{\sum_{v \in V} 1^2}}_{\sqrt{n}} \leq n\sqrt{n} \\ |E| &\leq \frac{1}{2}(n\sqrt{n} + n) \end{aligned}$$

Q.E.D.

Orientované grafy

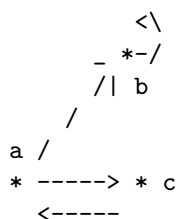
Orientovaný graf: $\vec{G} = (V, \vec{E})$, kde V je libovolná konečná množina a $\vec{E} \subseteq V \times V$.

Definice:

$\text{deg}^+ v =$ vstupní stupeň $v =$ počet hran vedoucích do v .
 $\text{deg}^- v =$ výstupní stupeň $v =$ počet hran vedoucích z v .

Příklad:

$$\vec{G} = (\{a, b, c\}, \{(a, b), (b, b), (a, c), (c, a)\})$$



$$\begin{aligned} \text{deg}^+ a &= 1 & \text{deg}^+ b &= 2 \\ \text{deg}^- a &= 2 & \text{deg}^- b &= 1 \end{aligned}$$

Definice:

\vec{G} je **slabě souvislý**, pokud $\forall x, y \in V$ existuje (neorientovaná) cesta z x do y .

$$x \bullet \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet y$$

\vec{G} je **slabě souvislý**, pokud $\forall x, y \in V$ existuje orientovaná cesta z x do y .

$$x \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet y$$

Definice:

Orientovaný graf \vec{G} je **eulerovský**, pokud lze nakreslit jedním uzavřeným orientovaným tahem.

$$\dots \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \dots$$

VĚTA (podmínka eulerovského grafu):

$\vec{G} = (V, \vec{E})$ je eulerovský $\iff \vec{G}$ je slabě souvislý a $\underbrace{\forall v \in V : \text{deg}^+ v = \text{deg}^- v}_{(*)}$.

DŮKAZ:

“ \implies ”

Zřejmé.

“ \impliedby ”

LEMMA:

Každou hranou grafu splňujícího $(*)$ vede uzavřený orientovaný tah.

DŮKAZ:

Nejdelší orientovaný tah danou hranou je uzavřený. Když ho totiž vedeme, postupně umazáváme hrany a nakonec nám podle rovnosti v (*) zbyde jen poslední hrana, která vede do v .

Q.E.D.

Nejdelší uzavřený orientovaný tah v \overrightarrow{G} je eulerovský. Jinak (obdobně jako v neorientovaném případě, schematicky):

```

/<-\
|    * nejdelší uzavřený orientovaný tah
\->/

```

Po použití lemmatu a odstranění hran tahu bychom však našli ještě další jiný uzavřený orientovaný tah, díky souvislosti má alespoň jeden společný vrchol. Pak ale můžeme oba tahy propojit do jednoho delšího uzavřeného tahu.

‡ *Spor*

Počet koster K_n

VĚTA (Cayleyho formule):

$\forall n \geq 2$: počet koster grafu K_n je n^{n-2} (tedy počet stromů na $\{1, \dots, n\}$).

Příklad:

$$n = 2: \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ 1 - 2 \\ | \\ \bullet \end{array}$$

$2^0 = 1$ kostra.

$$n = 3: \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ 1 - 2 - 3 \\ | \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ 2 - 1 - 3 \\ | \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ 1 - 3 - 2 \\ | \\ \bullet \end{array}$$

$3^1 = 3$ kostry.

$n = 4$: 12 koster typu housenka, 4 kostry typu vějíř.

DŮKAZ:

Slunce: Strom, v němž všechny hrany jsou zorientovány směrem od jediného vrcholu (středu slunce).

Pozorování 1:

Počet stromů na $\{1, \dots, n\}$ je roven

$$\frac{\text{počtu sluncí na } \{1, \dots, n\}}{n}$$

DŮKAZ:

Každý strom odpovídá n sluncím (máme v každém stromu n možností volby středu). *Q.E.D.*

Sosluní: Orientovaný graf, kde každá komponenta je slunce.

Pozorování 2:

Po odstranění libovolných k hran ze slunce dostaneme sousluní s $k+1$ komponentami (slunci).

DŮKAZ:

Zřejmý z obrázku. Vyhozením hrany ze slunce se slunce rozpadne na 2 další slunce. *Q.E.D.*

Pozorování 3:

Přidáním orientované hrany do sousluní dostaneme opěr sousluní, právě když přidaná hrana vede do středu libovolné jiné komponenty (slunce).

DŮKAZ:

Z obrázku.

Důkaz věty:

Z grafu izolovaných vrcholů $1, \dots, n$ dostaneme slunce na $\{1, \dots, n\}$ postupným přidáváním $n-1$ orientovaných hran právě, když přidaná hrana vždy vede z libovolného vrcholu do středu jiné komponenty.

Máme $n(n-1)$ možností volby první hrany. Možností volby druhé hrany máme $n(n-2)$. Pro třetí hranu máme $n(n-3)$ možností. ... Pro $(n-1)$. hranu máme $n \cdot 1$ možností.

Celkem máme $n^{n-1}(n-1)!$ možností, jak zvolit 1. až $(n-1)$. hranu. Každé slunce dostaneme $(n-1)!$ -krát. Sluncí tedy dostaneme n^{n-1} a stromů tak bude n^{n-2} .

Q.E.D.