

Orientované grafy

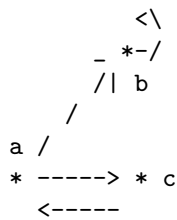
Orientovaný graf: $\vec{G} = (V, \vec{E})$, kde V je libovolná konečná množina a $\vec{E} \subseteq V \times V$.

Definice:

$\deg^+ v =$ vstupní stupeň $v =$ počet hran vedoucích do v .
 $\deg^- v =$ výstupní stupeň $v =$ počet hran vedoucích z v .

Příklad:

$$\vec{G} = (\{a, b, c\}, \{(a, b), (b, b), (a, c), (c, a)\})$$



$$\begin{aligned} \deg^+ a &= 1 & \deg^+ b &= 2 \\ \deg^- a &= 2 & \deg^- b &= 1 \end{aligned}$$

Definice:

\vec{G} je **slabě souvislý**, pokud $\forall x, y \in V$ existuje (neorientovaná) cesta z x do y .

$$x \bullet \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet y$$

\vec{G} je **slabě souvislý**, pokud $\forall x, y \in V$ existuje orientovaná cesta z x do y .

$$x \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet y$$

Definice:

Orientovaný graf \vec{G} je **eulerovský**, pokud lze nakreslit jedním uzavřeným orientovaným tahem.

$$\dots \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \dots$$

VĚTA (podmínka eulerovského grafu):

$\vec{G} = (V, \vec{E})$ je eulerovský $\iff \vec{G}$ je slabě souvislý a $\underbrace{\forall v \in V : \deg^+ v = \deg^- v}_{(*)}$.

DŮKAZ:

“ \implies ”

Zřejmé.

“ \impliedby ”

LEMMA:

Každou hranou grafu splňujícího $(*)$ vede uzavřený orientovaný tah.

DŮKAZ:

Nejdelší orientovaný tah danou hranou je uzavřený. Když ho totiž vedeme, postupně umazáváme hrany a nakonec nám podle rovnosti v (*) zbyde jen poslední hrana, která vede do v .

Q.E.D.

Nejdelší uzavřený orientovaný tah v \vec{G} je eulerovský. Jinak (obdobně jako v neorientovaném případě, schematicky):

```

/<-\
|   * nejdelší uzavřený orientovaný tah
\->/

```

Po použití lemmatu a odstranění hran tahu bychom však našli ještě další jiný uzavřený orientovaný tah, díky souvislosti má alespoň jeden společný vrchol. Pak ale můžeme oba tahy propojit do jednoho delšího uzavřeného tahu.

‡ *Spor*